

# FM1 Equazioni differenziali e Meccanica

A.A. 2001/2002

Guido Gentile

## 1. Operatori lineari

Spazi vettoriali e operatori lineari. Somma diretta. Complessificazione e decomplessificazione di uno spazio vettoriale e di un operatore lineare. Operatori lineari diagonalizzabili e non diagonalizzabili. Autospazi generalizzati e teorema di decomposizione spettrale (senza dimostrazioni). Esponenziale di un operatore lineare. Forma canonica di Jordan e forma canonica reale (senza dimostrazioni).

## 2. Equazioni differenziali lineari

Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti (omogenee e non omogenee) nel caso di operatori diagonalizzabili e non diagonalizzabili. Sistemi planari lineari. Equazioni differenziali lineari di ordine qualsiasi a coefficienti costanti.

## 3. Equazioni differenziali ordinarie: teoria generale

Definizione di sistemi dinamici. Flusso di un sistema dinamico. Problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità locale per sistemi dinamici autonomi e non autonomi di classe  $C^1$ . Teorema della dipendenza continua dai dati iniziali. Teorema del prolungamento della soluzione. Teorema della dipendenza differenziabile dai dati iniziali (solo enunciato). Equazioni a variabili separabili.

## 4. Analisi qualitativa del moto: teoria generale

Stabilità secondo Ljapunov. Punti di equilibrio stabile, asintoticamente stabile, attrattivo e instabile. Bacino d'attrazione. Insiemi limite. Sistemi dinamici linearizzati. Stabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice corrispondente al sistema linearizzato abbia tutti gli autovalori con parte reale (strettamente) negativa. Instabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice corrispondente al sistema linearizzato abbia almeno un autovalore con parte reale (strettamente) positiva. Teorema di stabilità di Ljapunov. Teorema di stabilità di Barbašin-Krasovskij. Sistemi meccanici conservativi. Teorema di Dirichlet sulla stabilità dei sistemi meccanici conservativi. Sezioni locali. Cicli limite. Traiettorie periodiche. Comportamento di un sistema dinamico lontano dai punti d'equilibrio: teorema della scatola di flusso.

## 5. Alcuni esempi di analisi qualitativa del moto

Sistemi planari. Teorema di Poincaré-Bendixson (solo enunciato) e applicazioni. Sistemi che ammettono una costante del moto: curve di livello e studio qualitativo delle traiettorie. Equazioni di Lotka-Volterra.

## 6. Analisi qualitativa per sistemi unidimensionali

Sistemi meccanici conservativi: conservazione dell'energia e curve di livello. Studio dell'energia potenziale. Orbite chiuse e traiettorie periodiche. Moti asintotici. Stabilità dei punti d'equilibrio e punti critici del potenziale. Tempi di percorrenza delle orbite e stime di periodi.

## 7. Moti centrali

Forze centrali. Problema dei due corpi. Campo centrale armonico e campo centrale coulombiano. Leggi di Keplero. Moti centrali periodici. Teorema di Bertrand (solo enunciato).

## 8. Moti relativi

Moto in un sistema di coordinate mobili. Cambiamento di sistemi di riferimento. Trasformazioni rigide, traslazioni e rotazioni. Velocità angolare. Forze d'inerzia: forza inerziale di traslazione, forza inerziale di rotazione, forza centrifuga e forza di Coriolis.

## 9. Vincoli e sistemi rigidi

Vincoli. Vincoli olonomi bilateri. Traiettorie virtuali. Caratteristiche cinematiche dei sistemi rigidi; teorema di König. Caratteristiche dinamiche dei sistemi rigidi; equazioni cardinali della dinamica. Principio di d'Alembert. Moltiplicatori di Lagrange. Applicazione del principio di d'Alembert ai sistemi rigidi.

## 10. Proprietà dei sistemi rigidi

Momenti d'inerzia. Operatore d'inerzia: assi d'inerzia e momenti principali d'inerzia. Momento d'inerzia rispetto a un asse fissato. Teorema di Huygens-Steiner. Sistemi rigidi (sia liberi sia con un punto fisso) non soggetti a forze attive. Equazioni di Eulero per il moto di sistemi rigidi. Rotazioni stazionarie.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni*. Disponibile in rete: <http://ipparco.roma1.infn.it>, (2002).
- [2] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore, (1996).
- [3] M.W. HIRSCH & S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, (1974).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [4] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, (1979).
- [5] V.I. ARNOL'D, *Équations différentielles ordinaires*. Éditions MIR, (1974).
- [6] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri, (1980).
- [7] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica*. Editori Riuniti, (1976).
- [8] T. LEVI-CIVITA & U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Elementare*. Zanichelli, (1947).

## MODALITÀ D'ESAME

|   |         |  |  |
|---|---------|--|--|
| - valutazione in itinere (“esoneri”)                                  |         | <input checked="" type="checkbox"/> SI | <input type="checkbox"/> NO            |
| - esame finale  | scritto | <input checked="" type="checkbox"/> SI | <input type="checkbox"/> NO            |
|   | orale   | <input checked="" type="checkbox"/> SI | <input type="checkbox"/> NO            |
| - altre prove di valutazione del profitto<br>(meglio descritte sotto) |         | <input type="checkbox"/> SI            | <input checked="" type="checkbox"/> NO |