

# AM2 Analisi Matematica-2<sup>o</sup> Modulo

A.A. 2001/2002

Prof. Gianni Mancini

Funzioni di variabile reale

## 1. Richiami della teoria della integrazione

Somme di Riemann, integrabilità, integrale. Integrabilità di funzioni con un numero finito di punti di discontinuità. Insiemi di misura nulla, il Teorema di Lebesgue-Vitali (s.d.). Linearità, positività, additività dell'integrale, prime disequazioni integrali, teoremi di media. La disequazione di Young (attività seminariale).

Il Teorema Fondamentale del calcolo, integrazione per parti e per sostituzione, integrali di funzioni pari, dispari, periodiche. Formule iterative, la Formula di Taylor con il resto in forma integrale.

Integrazione di funzioni razionali, cambi di variabile mediante funzioni circolari, iperboliche.

## 2. Integrali impropri

Integrali su semirette, la condizione di Cauchy, il criterio del confronto, comportamento asintotico e convergenza di un integrale. Assoluta convergenza.

Integrali impropri e serie numeriche, comportamento asintotico ( $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log(n+1) + r + o(1)$ ;  $\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c + o(1)$ ;  $\log n! = \log(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) + C + o(1), \dots$ ). Integrazione di funzioni oscillanti.

Integrali su  $R$ , integrazione di funzioni non limitate.

## 3. Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale, uniforme. La condizione di Cauchy per l'uniforma convergenza. Due teoremi di Dini, il teorema di Ascoli-Arzelà (attività seminariali).

$f_n \in C([a, b], f_n \rightarrow f \text{ unif. in } [a, b] \Rightarrow f \in C([a, b])$ ;  $f_n \rightarrow f \text{ unif. in } [a, b], f_n \text{ integrabili} \Rightarrow f \text{ integrabile e } \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ ;  $f_n \in C^1([a, b]), f_n \rightarrow f \text{ in } [a, b], f'_n \rightarrow g \text{ unif. in } [a, b] \Rightarrow f \in C^1 \text{ e } f' = g$ . Passaggio al limite negli integrali impropri, equidominanza, esempi e controesempi; un teorema di passaggio al limite senza ipotesi di equidominanza.

Serie di funzioni, totale convergenza, derivazione ed integrazione termine a termine.

Integrali dipendenti da parametro, dipendenza continua, derivazione sotto segno di integrale, il caso degli integrali impropri. Un'applicazione al calcolo di  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , la funzione  $\Gamma$  e la formula di Stirling (attività seminariali).

Il prodotto di convoluzione, continuità, derivabilità, nuclei regolarizzanti, regolarizzazione per convoluzione. Il Teorema di approssimazione di Weierstrass (attività seminariale).

#### 4. Serie di potenze, sviluppi in serie, funzioni analitiche

Raggio di convergenza e formula di Cauchy-Hadamard. Convergenza totale lontano dal bordo. Il teorema di Abel (attività seminariale). Serie derivata e regolarità  $C^\infty$  della funzione somma di una serie di potenze, funzioni intere. Serie di Taylor di una funzione  $C^\infty$ , sviluppabilità in serie di potenze, limitazione sulle derivate e convergenza della serie di Taylor. Sviluppi in serie di funzioni elementari:  $e^x, \sin x, \cos x$  sono funzioni intere. La serie geometrica e le sue derivate, la serie binomiale.

Funzioni analitiche reali, il criterio di analiticità. La somma di una serie di potenze è analitica. Principio di identità per funzioni analitiche.

Serie di potenze nel campo complesso, le funzioni  $\exp z, \sin z, \cos z$ . Convergenza della serie prodotto di due serie assolutamente convergenti, proprietà di omomorfismo di  $\exp z$ . Le formule di Eulero. Periodicità di  $\exp(ix)$ : il numero  $\pi$ .

#### 5. Alcune applicazioni del calcolo alle equazioni differenziali

L'equazione  $P' = f$ : questioni di esistenza, di unicità. L'equazione  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ : problema di Cauchy e unicità locale/globale in ipotesi di locale Lipschitzianità, controesempi; forma esplicita della soluzione, nella sola ipotesi di continuità. Equilibri, intervalli di esistenza/unicità in relazione alla natura degli equilibri, esplosione in tempo finito.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti variabili. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti variabili: soluzioni in forma di serie di potenze.

Equazioni differenziali lineari omogenee di ordine  $n$  a coefficienti costanti. Analiticità delle soluzioni, esistenza e unicità, via serie di potenze, per il problema di Cauchy. Sistema fondamentale e determinante Wronskiano, esistenza di un sistema fondamentale. Integrale generale. Polinomio caratteristico e costruzione di un sistema fondamentale. Equazioni non omogenee, struttura dell'integrale generale. Determinazione di una soluzione particolare, la formula della variazione delle costanti (per equazioni del secondo ordine). L'oscillatore armonico: oscillazioni libere/forzate/smorzate, risonanza.

#### 6. Funzioni vettoriali di variabile reale, funzioni scalari in più variabili

Struttura algebrica di  $R^n$ . Prodotto scalare, disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, norma euclidea, disuguaglianza triangolare. Successioni in  $R^n$ . Curve parametriche, continuità, derivabilità, vettore tangente. Integrale di una funzione vettoriale continua, la disuguaglianza  $\|\int_a^b x(t) dt\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt$ . Lunghezza di una curva parametrica, la formula  $l = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt$  e proprietà di invarianza. Curve orientate, versore tangente.

Funzioni reali di più variabili reali. Limiti, continuità. Insiemi compatti, connessi per archi. I teoremi di Weierstrass, di Heine-Cantor e del valore intermedio.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] MARCELLINI P., C. SBORDONE, *Analisi Matematica due*. Liguori, (1998).
- [2] L.CHERCHIA, *Lezioni di Analisi Matematica 2*. Aracne, (1997).
- [3] ENRICO GIUSTI, *Analisi Matematica II*. Boringhieri, (1996).
- [4] SILOV, *Analisi Matematica*. Editori Riuniti, (1978).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [5] MARSDEN-WEINSTEIN, *Calculus II*. Springer, (1991).
- [6] BRAMANTI-PAGANI-SALSA, *Matematica*. Zanichelli, (2000).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO