AM5 Teoria della misura e spazi funzionali
A.A. 2001/2002

Gianni Mancini

1. Misure e funzioni misurabili

Misure, la misura di Lebesgue in R^n, misure di Hausdorff in spazi metrici. Misurabilità secondo Caratheodori, la σ-algebra dei misurabili, numerabile additività. Misura dell'unione crescente, dell'intersezione decrescente. Misure metriche, misure boreliane. Regolaritá di una misura. La misura di Lebesgue in R^n è Borel regolare. Un esempio di insieme in R non misurabile secondo Lebesgue. Funzioni misurabili. Funzioni semplici misurabili, rappresentazione di una funzione misurabile $f \geq 0 : \exists E_j$ misurabili tali che $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}$.

2. Integrazione

Integrale di una funzione semplice, di funzioni misurabili, sommabilità. Linearità, positività dell'integrale, prime diseguaglianze integrali. Il teorema di Beppo Levi, il lemma di Fatou, il teorema di Lebesgue, o della convergenza dominata. Numerabile additività, assoluta continuità dell'integrale. Il teorema della media. Convergenza in media, le successioni di Cauchy convergono in media. Convergenza in media e convergenza quasi ovunque. Convergenza in misura e relazioni tra i diversi tipi di convergenza. Il teorema di Vitali. Misura prodotto ed i Teoremi di Fubini e di Fubini-Tonelli. Spazi di Hilbert, ortogonalità, proiezione ortogonale, il teorema di rappresentazione di Riesz. Misure assolutamente continue, singolari, il teorema di Radon-Nikodym, il teorema di decomposizione di Lebesgue. Spazi L^p. Le diseguaglianze di Holder e di Minkowski, completezza di L^p. Le funzioni semplici sommabili sono dense in L^p. L^2 è uno spazio di Hilbert. Funzionali lineari e continui su L^p, il duale di L^p è L^q.

3. Misura ed integrale di Lebesgue in R^n

Invarianza per traslazione della misura di Lebesgue. Proprietà di regolarità:

$L^n(E) = \inf\{L^n(O) : E \subset O, O \text{ aperto } \}$, $L^n(E) = \sup\{L^n(K) : K \subset E, K$ compatto$\}$. Lemma di Uryshon e approssimazione in media di funzioni caratteristiche misurabili mediante funzioni continue a supporto compatto. Due teoremi di Lusin. Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^1(R^n)$. Invarianza per traslazione dell'integrale di Lebesgue, le traslazioni agiscono in modo continuo su L^p. Convoluzione di funzioni $L^1, L^p - L^q$, la diseguaglianza di Young. Nuclei regolarizzanti, densità di C^∞ in L^p, separabilità di L^p. Approssimazione di funzioni $L^p(\Omega), \Omega \subset R^n$ aperto, mediante funzioni $C_0^\infty(\Omega)$. Compattezza in L^p, il teorema di Frechet-Kolmogoroff. Convergenza debole in $L^p, p > 1$, limitatezza in L^p delle successioni debolmente convergenti. La norma in L^p è debolmente inferiormente semicontinua. Successioni limitate in $L^p, p > 1$ hanno sottosuccessioni L^p-debolmente convergenti. Diseguaglianze di Sobolev e teorema di Rellich. Misure di Lebesgue-Stiltijes in R, assoluta continuità e funzioni assolutamente continue. Il Lemma di ricoprimento di Vitali ed il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch.

Testi consigliati

[1] Evans-Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*.
[2] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*. Boringhieri,
[3] Lieb-Loss, *Analysis*. AMS,

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	■ SI	☐ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	☐ NO