AM5 Teoria della misura e spazi funzionali
A.A. 2002/2003

Gianni Mancini

1. Misure e funzioni misurabili

Misure (esterne), la misura di Lebesgue in R^n, misure di Hausdorff , invarianza per traslazione, omogeneitá. Misurabilità secondo Caratheodori, la σ-algebra dei misurabili, numerabile additività. Misura dell'unione crescente, dell'intersezione decrescente. Misure metriche, misure boreliane. Regolaritá di una misura. La misura di Lebesgue in R^n è Borel regolare. Un esempio di insieme in R non misurabile secondo Lebesgue. Funzioni misurabili. Funzioni semplici misurabili, rappresentazione di una funzione misurabile $f \geq 0 : \exists E_j$ misurabili tali che $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\chi_{E_j}$. Un teorema di Lusin. Insieme di Cantor, funzione di Cantor.

2. Integrazione

Integrale di una funzione semplice, di funzioni misurabili, sommabilità. Linearità, positività dell'integrale, prime diseguaglianze integrali. Il teorema di Beppo Levi, il lemma di Fatou, il teorema di Lebesgue, o della convergenza dominata. Numerabile additività, assoluta continuità dell'integrale. Il teorema della media. Convergenza in media, le successioni di Cauchy convergono in media. Convergenza in media e convergenza quasi ovunque. Convergenza in misura e relazioni tra i diversi tipi di convergenza. Il teorema di Vitali. Misura prodotto ed i Teoremi di Fubini e di Fubini-Tonelli.

3. Spazi L^p.

Le diseguaglianze di Holder e di Minkowski, completezza di L^p. Diseguaglianza di Holder generalizzata, una diseguaglianza di interpolazione. Le funzioni semplici sommabili sono dense in L^p. L^2 è uno spazio di Hilbert. Diseguaglianza di Hanner (uniforme convessitá). Proiezione su di un sottoinsieme chiuso e convesso. Funzionali lineari e continui su L^p, il duale di $L^p, p > 1$ è isometricamente isomorfo a $L^q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Lo spazio L^∞, completezza. Se μ é σ-finita L^∞ é isometricamente isomorfo al duale di L^1. Separabilitá di L^p (ma non di L^∞). Convergenza debole, successioni limitate in $L^p, p > 1$ hanno sottosuccessioni debolmente convergenti. Successioni debolmente convergenti sono limitate (senza dimostrazione)

4. Misura ed integrale di Lebesgue in R^n

Invarianza per traslazione della misura di Lebesgue. Proprietà di regolarità:

$L^n(E) = \inf\{L^n(O) : E \subset O, O$ aperto $\}$, $L^n(E) = \sup\{L^n(K) : K \subset E, K$ compatto$\}$. Lemma di Uryshon e approssimazione in media di funzioni caratteristiche misurabili mediante funzioni continue a supporto compatto. Un teorema di Lusin. Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^1(R^n)$. Invarianza per traslazione dell'integrale di Lebesgue, le traslazioni agiscono in modo continuo su L^p. Convoluzione di funzioni $L^1, L^p - L^q$, la diseguaglianza di Young. Nuclei regolarizzanti, densità di C^∞ in L^p, ancora sulla separabilità di L^p. Approssimazione di funzioni $L^p(\Omega), \Omega \subset R^n$ aperto, mediante funzioni $C_0^\infty(\Omega)$. Compattezza in L^p, il teorema di Frechet-Kolmogoroff. La diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev. Diseguaglianze di Sobolev , di Poincaré e teorema di compattezza di Rellich.

5. Il Teorema di Radon-Nikodym

Misure assolutamente continue, singolari, il teorema di Radon-Nikodym, il teorema di decomposizione di Lebesgue. Misure di Borel regolari in R, distribuzione di una misura. Assoluta continuitá di una misura e assoluta continuitá della sua distribuzione. Misure di Lebesgue-Stiltijes in R, assoluta continuità e funzioni assolutamente continue. Il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch. Derivabilitá quasi ovunque delle funzioni assolutamente continue, teorema fondamentale del calcolo. Derivata di una misura singolare.

Testi consigliati

[1] Evans-Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* , ().
[2] W. Rudin, *Analisi reale e complessa.* Boringhieri, ().
[3] Lieb-Loss, *Analysis.* AMS, ().
[4] , .

Bibliografia supplementare

[5] , . , ().
[6] , . , ().

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	■ SI	☐ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		☐ SI	■ NO