CP2 Calcolo delle Probabilità
A.A. 2002/2003

Elisabetta Scoppola

1. Cenni di teoria della misura. Algebre e σ-algebre; σ-algebra di Borel. Spazi di misura. π-systems, unicità dell'estensione; Teorema di Carathéodory [senza dimostrazione]. Misura di Lebesgue. Disuguaglianze elementari. Proprietà di convergenza monotona delle misure.
[Cap. 1 di Williams. Esercitazione I.]

2. Spazi di probabilità e variabili aleatorie. Modello base: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Eventi. Esempi. Proprietà vere "q.c.". $\limsup$ e $\liminf$ di eventi. Primo lemma di Borel-Cantelli. Funzioni misurabili e proprietà (misurabilità della somma, del prodotto etc. di funzioni misurabili, misurabilità delle funzioni composte, misurabilità del $\liminf$ e $\limsup$ di funzioni misurabili etc.). Variabili aleatorie (v.a.). σ-algebra generata da una v.a. Legge e funzione di distribuzione di una v.a. Proprietà. Rappresentazione di Skorohod ed esistenza di v.a. con funzione di distribuzione o con legge data.
[Cap. 2 e 3 (escluso §14) di Williams. Esercitazione II.]

3. Indipendenza. Indipendenza di: σ-algebre, variabili aleatorie, eventi. Secondo lemma di Borel-Cantelli. Modello di lancio di moneta con applicazioni. Catene di Markov. σ-algebra di coda. Legge 0-1 di Kolmogorov.
[Cap. 4 (escluso §12) di Williams. Esercitazione III.]

4. Integrazione. Integrale sulle classi SF^+ (funzioni semplici non negative) e $(m\Sigma)^+$ (funzioni misurabili non negative). Teorema di convergenza monotona. Integrale di Lebesgue ed integrale di Riemann. Lemma di Fatou e "controparte" (per misure finite). Linearità. Lo spazio $\mathcal{L}^1$ delle funzioni integrabili. Teorema di convergenza dominata. Lemma di Scheffé. Integrale su sottoinsiemi misurabili. Misure assolutamente continue. Teorema di Radon-Nicodym [senza dimostrazione]. Variabili aleatorie assolutamente continue e densità di probabilità.
[Cap. 5 di Williams. Esercitazione IV.]

5. Valore atteso. Definizione. Disuguaglianze: Markov, Jensen, Hölder, Schwarz, Minkowski. Spazi $\mathcal{L}^p$: monotonia della $||\cdot||_p$; inclusione degli spazi $\mathcal{L}^p$; completezza. Lo spazio (di Hilbert) $\mathcal{L}^2$. Varianza e covarianza. Relazione tra covarianza nulla ed indipendenza. La media di una funzione di v.a. come integrale rispetto alla sua legge.
[Cap. 6 (escluso §11) di Williams. Esercitazione V.]

6. Convergenza e legge dei Grandi Numeri. Indipendenza ed aspettazione del prodotto. Convergenza di successioni di v.a.: in probabilità, q.c. e in $\mathcal{L}^p$. Implicazioni e controesempi. Disuguaglianza di Chebycev e legge debole dei Grandi Numeri. Legge forte dei Grandi Numeri e, come conseguenza, teorema di Weierstrass sull'approssimazione di funzioni continue tramite polinomi.
[Cap. 7 di Williams. Appunti in rete. Esercitazione VI.]

7. Misure prodotto e leggi congiunte. Spazio prodotto e σ-algebra prodotto. Misurabilità. Misura prodotto. Teorema di Fubini e teorema di Tonelli [senza dimostrazione]. Legge congiunta e funzione di distribuzione congiunta, proprietà e studio delle marginali. Funzione di densità congiunta. Teorema del cambio di variabile [senza dimostrazione] e utilizzo per il cacolo della densità (congiunta) di una funzione di v.a.
[Cap. 8 (esclusi §7,8) di Williams. Esercitazione VII, VIII.]

8. Funzione caratteristica. Definizione e proprietà elementari. Corrispondenza uno a uno tra leggi, funzioni di distribuzione e funzioni caratteristiche: formula di Inversione di Lévy. Esempi: legge gaussiana, esponenziale, esponenzilale-doppia, di Cauchy.
[Cap. 16 di Williams. Esercitazione IX.]

9. Convergenza debole e Teorema del Limite Centrale. Definizione di convergenza debole e in legge; relazioni con gli altri tipi di convergenza. Rappresentazione di Skorohod per una successione di funzioni di distribuzione che converge debolmente. Teorema di Helly-Bray. Condizione di *tightness*. Teorema di Convergenza di Lévy. Comportamento di una funzione caratteristica in un intorno dell'origine. Teorema del Limite Centrale.
[Cap. 17, 18 (esclusi §5,6) di Williams. Esercitazione IX, X.]

TESTI CONSIGLIATI

[1] D. WILLIAMS, *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, (1991).

[2] L. CARAMELLINO, *Appunti su convergenza e leggi dei Grandi Numeri*. Disponibili alla pagina web di CP2 (http://www.mat.uniroma3.it/didatticacds/corsi/didattica_interattiva/cp2/cp2.html), (2001).

[3] *Esercitazioni di CP2*. Disponibili alla pagina web di CP2 (http://www.mat.uniroma3.it/didatticacds/corsi/didattica_interattiva/cp2/cp2.html), (2001).

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	□ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO