

# AL3 Fondamenti di Algebra Commutativa

A.A. 2003/2004

Prof. Stefania Gabelli

## 1. Moduli

Moduli e sottomoduli. Operazioni tra sottomoduli. Omomorfismi e moduli quoziente. Generatori e basi. Somma e prodotto diretto di moduli. Moduli liberi. Invarianza del rango. Matrici su un anello e loro proprietà. Il Teorema di Cayley-Hamilton. Successioni esatte e successioni esatte corte. Risoluzioni libere (cenni).

## 2. Ideali

Operazioni tra ideali. Omomorfismi di Anelli e Anelli quoziente. Il Lemma di Zorn. Spettro primo e Spettro massimale di un anello. Il Teorema Cinese per gli anelli. Il "Prime Avoidance Theorem". Anelli locali. L'anello delle serie formali in una indeterminata. Ideali primi minimali. Nilradicale e Radicale di Jacobson. Il radicale di un ideale.

## 3. Anelli di Frazioni

Parti moltiplicative. Parti moltiplicative saturate. L'insieme degli zero-divisori è una unione di ideali primi. Il Nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi. Anelli e moduli di frazioni. Anello totale delle frazioni. Localizzazione. Esattezza della localizzazione. Proprietà locali. Estensione e contrazione di ideali. Ideali primi e primari in anelli di frazioni.

## 4. Anelli e Moduli Noetheriani

Condizione della catena ascendente e proprietà equivalenti. Moduli e anelli noetheriani. Il teorema di Cohen. Passaggio della noetherianità ai quozienti e agli anelli di frazioni. Moduli e algebre su anelli noetheriani. Il Teorema della Base di Hilbert. Decomposizione primaria di ideali: Primi associati; Componenti isolate e componenti immerse; Teoremi di unicità. Decomposizione primaria in anelli noetheriani. Il Lemma di Nakayama. Il Teorema dell'Intersezione di Krull. Cenni sulle varietà algebriche affini. Enunciato e significato del Teorema degli Zeri.

## 5. Dipendenza Integrale

Dipendenza Integrale: condizioni equivalenti. Transitività della dipendenza integrale. Chiusura integrale e sue proprietà: comportamento nel passaggio ai quozienti e agli anelli di frazioni. Cenni sulla noetherianità e la finitezza della chiusura integrale. Enunciato del Lemma di Normalizzazione di Noether. Dimensione della chiusura integrale: Lying over, Incomparabilità, Going up, Going down.

## 6. Anelli di Valutazione

Anelli di valutazione e loro prime proprietà. Anelli di valutazione discreta. Valutazioni discrete e valutazioni  $p$ -adiche. La relazione di dominanza. Il Teorema di Krull sulla chiusura integrale.

## 7. Domini di Dedekind

Domini di Dedekind e loro caratterizzazione tramite i domini di valutazioni discrete. Ideali frazionari invertibili. Fattorizzazione degli ideali nei domini di Dedekind. Cenni sui Domini di Krull.

**8. Anelli Artiniani** Condizione della catena discendente e proprietà equivalenti. Moduli e anelli artiniani. Prime proprietà degli anelli artiniani. Il Teorema di Struttura.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] M. F. ATIYAH, I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, (1969).  
 [2] R. Y. SHARP, *Steps in Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts, 51, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in un colloquio orale, volto ad accertare l'acquisizione da parte dello studente dei concetti e dei metodi illustrati nel corso.

Concorrono alla definizione del voto di esame la partecipazione alle esercitazioni in classe e l'eventuale svolgimento di argomenti complementari al corso (tesine).