

GE9 GEOMETRIA ALGEBRICA 2

A.A. 2004/2005

Prof. Edoardo Sernesi

Algebra Omologica

1. NOZIONI GENERALI DI ALGEBRA OMOLOGICA Complessi di moduli su un anello commutativo, successioni esatte, omologia, coomologia.

Il lemma del serpente. Spezzamento di successioni esatte corte. Omomorfismi di complessi e successioni esatte corte di complessi. La successione lunga di omologia associata ad una successione esatta corta di complessi.

Omotopia di omomorfismi di complessi e sue proprietà. Il cono di applicazione di un morfismo di complessi e sue proprietà.

Prodotto tensoriale di moduli. Proprietà ed esempi.

Moduli proiettivi e loro proprietà. I moduli proiettivi su un anello locale noetheriano sono liberi. Risoluzioni minimali. I numeri di Betti di un modulo f.g. su un anello locale noetheriano.

Moduli iniettivi. Relazione con i moduli divisibili. Caso di un PID. Esistenza di moduli iniettivi su un anello commutativo.

2. CATEGORIE E FUNTORI Generalità su categorie e funtori. Categorie abeliane. Funtori additivi e funtori esatti tra categorie abeliane. Esempi.

3. FUNTORI DERIVATI

Oggetti iniettivi/proiettivi in una categoria abeliana. Risoluzioni iniettive/proiettive. Definizione dei funtori derivati destri (sinistri) di un funtore esatto a sinistra (destra).

Estensione di morfismi di oggetti a morfismi di loro risoluzioni iniettive (proiettive). Applicazione alla definizione di funtore derivato.

Omotopia di morfismi di risoluzioni. Omomorfismi di connessione per i funtori derivati.

4. FUNTORI EXT E TOR E APPLICAZIONI

I funtori Tor. Proprietà ed esempi.

I funtori Ext. Prime proprietà. Elementi regolari e successioni regolari. Relazione tra Ext e successioni regolari. Il complesso di Koszul. Il complesso di Koszul come cono di applicazione. Complesso di Koszul e successioni regolari. Dimensione omologica e dimensione omologica globale. Il caso locale.

Profondità e codimensione. Profondità e complesso di Koszul. La formula di Auslander-Buchsbaum.

Lemma di Schauder e sue conseguenze. Anelli locali regolari. Versione locale del teorema di Hilbert.

5. SUCCESSIONI SPETTRALI

Complessi doppi. Oggetti filtrati e oggetti graduati in una categoria abeliana. Successioni spettrali. Le successioni spettrali associate ad un complesso doppio. Lemmi e proprietà varie delle successioni spettrali di primo quadrante Applicazione al calcolo dei funtori Ext e Tor. Risoluzioni di Cartan e loro esistenza. Successioni spettrali di ipercoomologia e funtori di ipercoomologia. Applicazioni ed esempi.

6. COOMOLOGIA DEI FASCI

Prefasci e fasci di insiemi. Esempi. Spighe e germi. Omomorfismi di prefasci e loro proprietà. Omomorfismi suriettivi e iniettivi e isomorfismi. Il fascio associato a un prefascio. Prefasci a valori in una categoria. Prefasci e fasci di gruppi abeliani. La categoria dei fasci di gruppi abeliani è abeliana. Immagine diretta di fasci. Restrizione di fasci ad aperti e a chiusi. Prodotto tensoriale di fasci di gruppi abeliani. Il fascio dei germi di omomorfismi. Fasci fiacchi e loro proprietà. Risoluzioni di Godement di fasci con fasci fiacchi e loro proprietà.

Gruppi di coomologia di uno spazio topologico a coefficienti in un fascio e loro calcolabilità per mezzo di risoluzioni con fasci fiacchi.

Gruppi di cocatene e gruppi di coomologia di Chech di un ricoprimento a coefficienti in un fascio. Raffinamenti e omomorfismi indotti in coomologia. Gruppi di coomologia di Chech di uno spazio topologico. Aciclicità dei fasci fiacchi. Omomorfismi canonici dai gruppi di coomologia di Chech a quelli di coomologia ordinari. Spazi con buona coomologia dei fasci. Esempi: fasci algebrici su una varietà algebrica. Il teorema di Serre sulla coomologia delle varietà affini.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] EISENBUD D., *Commutative Algebra*. Springer, (1995).
 [2] GODEMENT R., *Theorie des faisceaux*. Hermann, (1964).
 [3] MAC LANE S., *Homology*. (1967).
 [4] SERNESI E., *Geometria Algebrica*. (appunti).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [5] , . , ().
 [6] , . , ().

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

Esame orale con possibilità di svolgere un seminario su un argomento da concordare con il docente.