AM5 Teoria della misura e spazi funzionali
A.A. 2004/2005

Gianni Mancini

1. Misure e funzioni misurabili

Misure (esterne), la misura di Lebesgue in R^n, misure di Hausdorff , invarianza per traslazione, omogeneitá. Misurabilità secondo Caratheodori, la σ-algebra dei misurabili, numerabile additività. Misura dell'unione crescente, dell'intersezione decrescente. Misure metriche, misure boreliane. Regolaritá di una misura. La misura di Lebesgue in R^n è Borel regolare, approssimazione mediante aperti, compatti. Insieme di Cantor, funzione di Cantor. Un esempio di insieme in R non misurabile secondo Lebesgue.

Funzioni misurabili. Funzioni semplici misurabili, rappresentazione di una funzione misurabile $f \geq 0 : \exists E_j$ misurabili tali che $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}$.

2. Integrazione

Integrale di una funzione semplice, di funzioni misurabili, sommabilità. Linearità, positività dell'integrale, prime diseguaglianze integrali. Il teorema di Beppo Levi, il lemma di Fatou, il teorema di Lebesgue, o della convergenza dominata. Numerabile additività, assoluta continuità dell'integrale. Convergenza in media, le successioni di Cauchy convergono in media. Convergenza in media e convergenza quasi ovunque. Convergenza in misura e relazioni tra i diversi tipi di convergenza. Il teorema di Vitali. Misura prodotto ed i Teoremi di Fubini e di Fubini-Tonelli.

3. Spazi L^p.

Le diseguaglianze di Holder e di Minkowski, completezza di L^p. Diseguaglianza di Holder generalizzata, una diseguaglianza di interpolazione. Le funzioni semplici sommabili sono dense in L^p.

Spazi di Hilbert, L^2 è uno spazio di Hilbert. Proiezione ortogonale in un Hilbert, il Teorema di rappresentazione di Riesz. Diseguaglianza di Bessel, basi ortonormali e loro caratterizzazioni, identita' di Parseval. Convergenza debole, semicontinuitá inferiore debole della norma. Le successioni debolmente convergenti sono limitate, le successioni limitate hanno sottosuccessioni debolmente convergenti. Il Lemma di Masur.

Convergenza debole in spazi $L^p, p > 1$, semicontinuitá inferiore debole della norma. Le successioni debolmente convergenti sono limitate. Diseguaglianza di Hanner (uniforme convessitá). Proiezione su di un sottoinsieme chiuso e convesso. Funzionali lineari e continui su L^p, il duale di $L^p, p > 1$ è isometricamente isomorfo a $L^q(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Le successioni limitate in $L^p, p > 1$ hanno sottosuccessioni debolmente convergenti. Il Lemma di Masur.

Lo spazio L^∞, completezza. Il Teorema della media. Se μ é σ-finita L^∞ é isometricamente isomorfo al duale di L^1. Funzionali lineari e continui su L^∞ che non si rappresentano con funzioni L^1. Separabilitá di L^p (ma non di L^∞). Convergenza debole in L^1, successioni limitate in L^1 che non hanno estratte debolmente convergenti. Convergenza debole* in L^∞, compattezza debole*.

Funzionali lineari continui su L^∞ e misure. Misure assolutamente continue. Il Teorema di Radon Nikodym. Caratterizzazione dei funzionali lineari e continui su L^∞ che si rappresentano mediante funzioni L^1 in termini di continuitá (sequenziale) debole*. Misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.

4. Misura ed integrale di Lebesgue in R^n

Invarianza per traslazione, riflessione, della misura di Lebesgue, N-omogeneitá. Proprietà di regolarità:

$L^n(E) = \inf\{L^n(O) : E \subset O, O$ aperto $\}$, $L^n(E) = \sup\{L^n(K) : K \subset E, K$ compatto$\}$. Approssimazione in media di funzioni caratteristiche misurabili mediante funzioni continue a supporto compatto. Le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^1(R^n)$. Invarianza per traslazione dell'integrale di Lebesgue, le traslazioni agiscono in modo continuo su L^p. Convoluzione di funzioni L^1, $L^p - L^q$, la diseguaglianza di Young. Nuclei regolarizzanti, densità di C_0^∞ in L^p, ancora sulla separabilità di L^p.

Compattezza in L^p, il teorema di Frechet-Kolmogoroff.

Il Lemma di ricoprimento di Vitali, il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch.

5. Diseguaglianze di Sobolev

La diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev. Diseguaglianze di Sobolev , Morrey, Poincaré e teorema di compattezza di Rellich.

Derivate deboli, gli spazi $H^1(R^N), D^1(R^N)$. Soluzioni deboli dell'equazione di Poisson in R^N con dato in $L^{\frac{2N}{N+2}}$. Unicitá e dipendenza continua dal dato. Rappresentazione della soluzione come convoluzione del dato con la soluzione fondamentale, proprietá di regolaritá.

Testi consigliati

[1] Evans-Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. , ().
[2] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*. Boringhieri, ().
[3] Lieb-Loss, *Analysis*. AMS, ().
[4] H. Brezis, *Analisi Funzionale*. Liguori, ().
[5] , .

Bibliografia supplementare

[6] , . , ().
[7] , . , ().

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO