

# AM6 Principi dell'analisi funzionale

A.A. 2005/2006

Prof. L. Chierchia

NB: La numerazione si riferisce al testo [1].

Generalità sugli operatori lineari tra spazi normati; norma di operatori lineari. Esempi di spazi normati infinito dimensionali. Seminorme. Lemma di Zorn (enunciato). Teorema di Hahn-Banach (formulazione analitica). Alcuni corollari del teorema di Hahn-Banach. La funzione di gauge di un convesso aperto contenente l'origine. Esempi di funzionali lineari non continui su un qualunque spazio normato infinito-dimensionale. Separazione di insiemi tramite iperpiani chiusi. Teorema di Hahn-Banach: formulazione geometrica (debole e forte).

Funzioni semicontinue inferiormente. Insiemi e funzioni convesse. Funzioni coniugate e bi-coniugate. Teorema di Fenchel-Moreau.

Il lemma di Baire. Il teorema di Banach-Steinhaus. Il teorema dell'applicazione aperta. Alcune conseguenze del teorema dell'applicazione aperta: corollario II.6; osservazione 5. Teorema del grafico chiuso.

Relazioni d'ortogonalità in spazi di Banach. Proposizione II.12. Ortogonale in uno spazio di Banach e nel duale. Proposizioni II.13, II.14 e Corollario II.14.

Operatori non limitati; operatori non limitati chiusi. L'aggiunto di un operatore non limitato. L'aggiunto di un operatore non limitato è chiuso.  $J(G(A^*)) = G(A)^\perp$ . Corollario II.17. Teorema II.12 (solo enunciato).

Topologie generate da una data famiglia di insiemi; la topologia meno fine che rende continue una data famiglia di funzioni. Proposizioni III.1 e III.2. Topologia debole  $\sigma(E, E')$ ; proprietà fondamentali (proposizioni III.3, III.4, III.5, III.6). Se  $E$  è uno spazio di Banach infinito dimensionale, la chiusura debole di  $\{\|x\| = 1\}$  è  $\{\|x\| \leq 1\}$ . Un sottoinsieme convesso di uno spazio di Banach è (fortemente) chiuso se e solo se è debolmente chiuso. Una funzione convessa e s.c.i. su  $E$  (forte) è s.c.i. per la topologia debole  $\sigma(E, E')$ . Un operatore lineare tra due spazi di Banach è (fortemente) continuo se e solo se è continuo da  $(E, \sigma(E, E'))$  in  $(F, \sigma(F, F'))$ . La topologia \* debole su  $E'$ : proprietà generali. Teorema di Banach, Alaoglu.

Spazi riflessivi. Lemmi di Helly e Goldstine. Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se la sua palla unitaria è debolmente compatta.  $E$  (spazio di Banach) è riflessivo se e solo se  $E'$  è riflessivo. Corollario III.19. Corollario III.20. Teorema III.21.

Spazi separabili. Se  $E$  è uno spazio di Banach tale che  $E'$  è separabile allora  $E$  è separabile. Corollario III.24. Se  $E$  uno spazio di Banach,  $B_{E'}$  è metrizzabile per  $\sigma(E, E')$  se e solo se  $E$  è separabile. Corollari III.26 e III.27.

Spazi uniformemente convessi. Gli spazi di Banach uniformemente convessi sono rif-

lessivi. Proposizione III.30.

Spazi di Hilbert: proprietà geometriche fondamentali (prodotto scalare; disuguaglianza di Cauchy; identità del parallelogramma; uniforme convessità; riflessività proiezione su convessi chiusi). Duale di uno spazio di Hilbert (teorema di Riesz-Fréchet)

Forme bilineari, continue e coercive: teorema di Stampacchia e teorema di Lax-Milgram. Somma diretta di sottospazi; disuguaglianza di Bessel ed identità di Parseval. Basi hilbertiane. Spazi di Hilbert separabili e costruzione di una base hilbertiana (Gram-Schmidt).

Operatori compatti. Lo spazio degli operatori compatti è chiuso. Operatori a rango finito. Il limite (forte) di operatori a rango finito è compatto; in spazi di Hilbert ogni operatore compatto è limite di operatori a rango finito. Componendo operatori compatti con operatori limitati si ottengono operatori compatti. Un operatore è compatto se e solo se il suo aggiunto è compatto.

Teoria di Fredholm. Lemmi di Riesz (Lemma VI.1 e VI.5); supplementari topologici. Teorema dell'alternativa di Fredholm.

Definizione di spettro. Esempi di operatori compatti con spettro dato da una successione (arbitraria) di numeri reali an tendenti a 0. Lo spettro di un operatore limitato  $T$  è un sottoinsieme compatto dell'intervallo  $[-\|T\|, \|T\|]$ . Spettro di operatori compatti. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.

Il problema classico di Dirichlet per un dominio regolare  $D \subset \mathbb{R}^3$  con dato al bordo  $f \in C(\partial D)$ : riduzione del problema di Dirichlet al problema:  $(I - T)\psi = -f$  con  $T : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$  compatto.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.*, Masson, (1983).  
[2] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol I: Functional Analysis.* Academic Press, (1972).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

Esercizi assegnati da svolgere a casa.