

# FM1 Equazioni differenziali e Meccanica

A.A. 2008/2009

Guido Gentile

## 1. Equazioni differenziali ordinarie: teoria generale

Definizione di sistema dinamico. Sistemi dinamici ed equazioni differenziali ordinarie. Traiettorie e orbite. Flusso di un sistema dinamico. Funzioni lipschitziane e funzioni di classe  $C^1$ . Sistemi autonomi e non autonomi. Problema di Cauchy. Teorema di esistenza (solo enunciato) e unicità locale per sistemi dinamici di classe  $C^1$ . Esempi e controesempi. Lemma di Gronwall. Teorema della dipendenza continua dai dati iniziali. Prolungamento di una soluzione e soluzione massimale. Teorema del prolungamento della soluzione e sue implicazioni. Teorema della dipendenza differenziabile dai dati iniziali (solo enunciato). Equazioni a variabili separabili.

## 2. Operatori lineari

Spazi vettoriali e operatori lineari: richiami. Norma uniforme e sue proprietà. Cambiamenti di base. Somma diretta. Spettro di un operatore lineare. Complessificazione e decomplessificazione di uno spazio vettoriale e di un operatore lineare. Operatori lineari diagonalizzabili e non diagonalizzabili. Operatori lineari semisemplici e operatori lineari nilpotenti. Autospazi generalizzati. Teorema di decomposizione primaria (solo enunciato). Decomposizione di un operatore lineare nella somma diretta di un operatore semisemplice e di uno nilpotente. Esponenziale di un operatore lineare: definizioni e proprietà.

## 3. Equazioni differenziali lineari

Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti omogenee. Teorema di esistenza e unicità globale della soluzione. Equazioni differenziali lineari di ordine qualsiasi a coefficienti costanti. Ricerca delle soluzioni nella forma di polinomi pesati con fattori esponenziali. Sistemi planari lineari: analisi qualitativa del moto. Oscillatore armonico. Sistemi di equazioni differenziali lineari non omogenee. Metodo di variazione delle costanti. Oscillatore armonico smorzato forzato (con forzante periodica). Risonanza.

## 4. Analisi qualitativa del moto: teoria generale

Stabilità secondo Ljapunov. Punti di equilibrio stabile, asintoticamente stabile, attrattivo e instabile. Bacino d'attrazione. Insiemi limite. Sistemi dinamici linearizzati. Stabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice corrispondente al sistema linearizzato abbia tutti gli autovalori con parte reale strettamente

negativa. Instabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice corrispondente al sistema linearizzato abbia almeno un autovalore con parte reale strettamente positiva (solo enunciato). Teorema di stabilità di Ljapunov. Teorema di stabilità di Barbašin-Krasovskij. Pendolo semplice con e senza attrito. Sistemi meccanici conservativi. Teorema di Dirichlet sulla stabilità dei sistemi meccanici conservativi. Cicli limite. Traiettorie periodiche. Comportamento di un sistema dinamico lontano dai punti d'equilibrio: teorema della scatola di flusso. Teorema di Poincaré-Bendixson (solo enunciato).

### **5. Alcuni esempi di analisi qualitativa del moto**

Sistemi planari. Sistemi che ammettono una costante del moto: curve di livello e studio qualitativo delle traiettorie. Soluzioni periodiche e soluzioni asintotiche: traiettorie omocline ed eterocline. Sistemi gradiente: proprietà e analisi qualitativa. Equazioni di Lotka-Volterra.

### **6. Analisi qualitativa per sistemi unidimensionali**

Sistemi meccanici conservativi: conservazione dell'energia e curve di livello. Studio dell'energia potenziale. Orbite chiuse e traiettorie periodiche. Moti asintotici. Stabilità dei punti d'equilibrio e punti critici del potenziale. Tempi di percorrenza delle orbite, periodi come integrali definiti e stime di periodi.

### **7. Moti centrali**

Forze centrali. Problema dei due corpi. Moti centrali. Gradiente in coordinate polari e in coordinate sferiche. Conservatività delle forze centrali. Conservazione del momento angolare per le forze centrali. Moto radiale e moto angolare. Condizioni di periodicità del moto. Teorema di Bertrand (solo enunciato). Campo centrale armonico e campo centrale coulombiano: equazioni delle orbite. Velocità areolare. Leggi di Keplero.

### **8. Moti relativi**

Moto in un sistema di coordinate mobili. Cambiamento di sistemi di riferimento. Trasformazioni rigide, traslazioni e rotazioni. Velocità angolare. Forze d'inerzia: forza inerziale di traslazione, forza inerziale di rotazione, forza centrifuga e forza di Coriolis. Teorema di Coriolis. Esempi e applicazioni.

### **9. Vincoli**

Vincoli. Vincoli onolomi bilateri. Vincolari regolari e indipendenti. Superficie di vincolo. Forze vincolari. Traiettorie virtuali. Principio di d'Alembert. Vincoli di rigidità.

### **10. Sistemi rigidi**

Sistemi rigidi. Spazio delle configurazioni dei sistemi rigidi. Caratteristiche cinematiche dei sistemi rigidi: energia cinetica e momento angolare. Teorema di König. Caratteristiche dinamiche dei sistemi rigidi: equazioni cardinali della dinamica. Applicazione del principio di d'Alembert ai sistemi rigidi. Momenti d'inerzia. Operatore d'inerzia: assi d'inerzia e momenti principali d'inerzia. Momento d'inerzia rispetto a un asse fissato. Teorema di Huygens-Steiner. Calcolo dei momenti principali d'inerzia in alcuni sistemi semplici, quali: sbarra, disco, anello, cilindro, sfera, cono, lastra. Equazioni di Eulero: analisi qualitativa del moto.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti, (1979).
- [2] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore, (1996).
- [3] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni*.  
Disponibile in rete: <http://www.mat.uniroma3.it>, (2006).
- [4] M.W. HIRSCH & S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, (1974).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [5] V.I. ARNOL'D, *Équations différentielles ordinaires*. Éditions MIR, (1974).
- [6] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri, (1980).
- [7] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica*. Editori Riuniti, (1976).
- [8] T. LEVI-CIVITA & U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Elementare*. Zanichelli, (1947).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto <input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale <input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in una prova scritta, comprendente anche domande di tipo teorico ed eventualmente sostituita da prove di valutazione parziale (“esoneri”) durante lo svolgimento del corso, e in un colloquio orale facoltativo.