

# AM2 Analisi secondo modulo

A.A. 2009/2010

Prof. Giovanni Mancini

Funzioni di variabile reale

## 1. Funzioni di due o più variabili reali: continuità, differenziabilità.

Struttura algebrica, prodotto scalare in  $\mathbf{R}^n$ , disuguaglianza di Cauchy–Schwartz. Norma e metrica in  $\mathbf{R}^n$ . Successioni convergenti. Insiemi aperti, chiusi, chiusura e frontiera di un insieme. Ricoprimenti aperti, da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento numerabile. Compattezza: gli insiemi chiusi e limitati hanno la proprietà del ricoprimento finito; caratterizzazione mediante successioni. Limiti di funzioni, continuità; caratterizzazione mediante successioni. I teoremi di Weierstrass e di Heine-Cantor. Insiemi connessi per archi, teorema del valore intermedio.

Derivate parziali, direzionali. Funzioni lineari, differenziabilità, vettore gradiente. La differenziabilità implica parziale derivabilità (ma non viceversa), le funzioni  $C^1$  sono differenziabili. Significato geometrico di differenziale, di gradiente, piano tangente.

Il teorema del valor medio, funzioni a gradiente nullo. Derivazione lungo un cammino differenziabile.

Derivate successive, il teorema di Schwartz. La matrice Hessiana. Matrici simmetriche e forme quadratiche associate: definitezza, semidefinitezza e segno degli autovalori. La formula di Taylor al secondo ordine. Massimi e minimi liberi, condizioni necessarie/sufficienti.

Funzioni a valori vettoriali. Continuità, differenziabilità, matrice Jacobiana. Regola della catena.

## 2. Successioni e serie di funzioni

Successioni di funzioni reali di una o più variabili reali: convergenza puntuale, uniforme. Il criterio di Cauchy. La continuità si conserva nel limite uniforme. Teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale, derivazione termine a termine, derivazione sotto segno di integrale. Equidominanza e passaggio al limite negli integrali impropri.

Serie di funzioni, convergenza puntuale, uniforme, totale. Integrazione, derivazione termine a termine. Serie di potenze in campo reale, raggio di convergenza, totale convergenza. Serie derivata, la somma di una serie di potenze è  $C^\infty$ . Sviluppo in serie di potenze, serie di Taylor delle principali funzioni elementari.

Funzioni analitiche, la somma di una serie di potenze è analitica.

Serie di potenze nel campo complesso. Funzione esponenziale, circolari, iperboliche in  $\mathbf{C}$ . Prodotto secondo Cauchy, proprietà di omomorfismo dell'esponenziale complesso. Le formule di Eulero. Logaritmo e potenze nel campo complesso.

Coefficienti e serie di Fourier, diseguaglianza di Bessel. Sviluppabilità in serie di Fourier. Regolarità e rapidità di convergenza dei coefficienti di Fourier.

### 3. Spazi metrici, il Principio delle Contrazioni

Spazi metrici, insiemi aperti/chiusi, convergenza, caratterizzazione sequenziale dei chiusi. Completezza. Spazi di Banach.  $C(K, \mathbf{R}^n)$ , dotato della norma della convergenza uniforme, è un Banach. Integrali dipendenti da parametri, derivazione sotto segno di integrale. Regolarizzazione per convoluzione. Convoluzione tra funzioni  $2\pi$ -periodiche, approssimazione uniforme di funzioni continue  $2\pi$  periodiche mediante polinomi trigonometrici. Principio di identità, una funzione la cui serie di Fourier è assolutamente convergente è sviluppabile in serie di Fourier. Sviluppabilità in serie di Fourier di funzioni periodiche e di classe  $C^1$ .

Funzioni continue tra spazi metrici, contrazioni. Il Teorema delle contrazioni.

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie, esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy. Dipendenza continua dai dati. Prolungabilità, esistenza globale; sistemi tipo gradiente, sistemi coservativi, Hamiltoniani. Sistemi lineari, matrice fondamentale, Wronskiano, la formula della variazione delle costanti.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] MARCELLINI P., C. SBORDONE, *Elementi di Analisi Matematica due*. Liguori (2001).  
 [2] L. CHIERCHIA, *Lezioni di Analisi Matematica 2*. Aracne (1997).  
 [3] ENRICO GIUSTI, *Analisi Matematica II*. Boringhieri (1996).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [4] SILOV, *Analisi Matematica*. Editori Riuniti (1978).  
 [5] MARSDEN-WEINSTEIN, *Calculus II*. Springer (1991).  
 [6] BRAMANTI-PAGANI-SALSA, *Matematica*. Zanichelli (2000).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO