

# MA10 Analisi Matematica per le Applicazioni

A.A. 2009/2010

Prof. Renato Spigler

**1. Generalità** Introduzione al Corso: idee generali su “modelli” e modelli matematici; modelli matematici basati su equazioni differenziali (ordinarie o alle derivate parziali, lineari e non). Problemi ben posti (nel senso di Hadamard). Metodi qualitativi (asintotici) e metodi quantitativi (numerici). Richiami sui problemi di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie e sistemi, nonché sulla loro risoluzione numerica.

## 2. Modelli di precipitazione di cristalli

Il problema della precipitazione di cristalli da una soluzione soprasatura; il fenomeno della “maturazione di Ostwald”. Caso di cristalli di una,  $N$  o infinite dimensioni tipiche. Modello di trasporto (equazione iperbolica non lineare non locale); suo trattamento numerico mediante differenze finite e mediante funzioni cardinali “sinc”. Cenno ai modelli LS (da Lifshitz-Slyozov) e LSW (da Lifshitz-Slyozov-Wagner). Cenno a un approccio perturbativo per mettere in relazione questi due modelli. Approssimazioni mediante serie asintotiche, cenno a “perturbazioni singolari” di equazioni differenziali ordinarie e idea della boundary layer. Alcune proprietà delle funzioni sinc, con brevi richiami sulle funzioni olomorfe, le serie e le trasformate di Fourier. La classe di funzioni di Paley-Wiener, il teorema di Paley-Wiener (solo enunciato) e le funzioni rappresentabili in serie di funzioni sinc.

## 3. Modelli di inquinamento ambientale

Le equazioni di trasporto-diffusione. Vari schemi alle differenze finite per la loro risoluzione numerica (anche schemi di Lax-Friedrichs, di Lax-Wendroff, e “box scheme”). Idea di stabilità e convergenza. Il criterio di stabilità numerica di von Neumann. Condizione di stabilità per schemi espliciti.

Un modello di trasporto-diffusione in tre dimensioni per descrivere gli effetti di un inquinante nocivo: la tragedia del Bhopal. Risoluzione analitica mediante l'uso di serie di Fourier e trasformate di Laplace (con un cenno a queste ultime).

## 4. Litografia elettronica

Il problema della litografia elettronica, tenendo conto degli effetti di forward e backward scattering. Rappresentazione della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore (anche in più dimensioni); soluzione fondamentale. Unicità delle soluzioni limitate e principio di massimo. Soluzione approssimata del problema inverso mediante serie di Fourier con un numero modesto di armoniche. Regolarizzazione mediante medie di Cesaro. Richiami all'idea del teorema di Cesaro (analogo al teorema di L'Hopital nel discreto) e dimostrazione del teorema di Féjer per le serie di Fourier.

### **5. Modelli basati su equazioni di reazione-diffusione**

In relazione a certi modelli che interessavano le pellicole fotografiche a colori, si discutono certe proprietà delle soluzioni di sistemi costituiti da un'equazione di tipo parabolico e da una ordinaria. Per la prima si danno dei "principi di massimo". Metodi espliciti alle differenze finite per la risoluzione dell'equazione del calore ed altre equazioni paraboliche. Metodi impliciti alle differenze finite e loro stabilità incondizionata.

### **6. Modelli di crescita di tumori e cenno a modelli epidemiologici**

Modelli di crescita di tumori solidi. Primo modello senza considerare la struttura interna del tumore (semplice crescita o meno di uno sferoide). Ulteriore modello che tiene conto della struttura interna del tumore e di una sostanza nutriente che diffonde al suo interno, sia in assenza che in presenza di un cuore necrotico all'interno. Commenti qualitativi e sul trattamento numerico.

Modelli epidemiologici (di tipo SIR) sia senza che con effetti diffusivi spaziali.

### **7. Implementazione di algoritmi**

Quasi un terzo del Corso si svolge in laboratorio (informatico). Vengono implementati algoritmi relativi a problemi trattati nel Corso, in MATLAB o altro linguaggio di Programmazione, a scelta.

### **8. Seminari**

Come ogni anno si è invitato qualche studioso per illustrare applicazioni della Matematica al mondo reale. Il contenuto dei seminari tenuti non sono considerati parte del programma d'esame. Nel 2010 sono stati invitati il Prof. Giovanni Frosali dell'Università di Firenze, che ha parlato di "Modelli matematici per la dinamica ed il controllo della bicicletta" e il Dott. Alberto D'Onofrio dell'IEO di Milano, che ha parlato di "Vaccination, Information, and Bifurcation".

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] AVNER FRIEDMAN AND WALTER LITTMAN, *Industrial Mathematics – A Course in Solving Real-World Problems*. SIAM, Philadelphia (1994).
- [2] JOHN LUND AND KENNETH L. BOWERS, *Sinc Methods – for Quadrature and Differential Equations*. SIAM, Philadelphia (1992).
- [3] *Materiale fornito dal Docente*.

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in una prova scritta comprendente da tre a cinque domande sugli argomenti svolti a lezione. A volte viene proposta una domanda facoltativa.