AC01 Analisi complessa 1
A.A. 2010/2011

Prof. Lucia Caporaso

1. Funzioni analitiche e mappe conformi Numeri complessi. Funzioni olomorfe. Regole di derivazione per funzioni olomorfe e proprietà elementari. Esempi. Caratterizzazione di funzioni olomorfe tramite le equazioni di Cauchy-Riemann. Funzioni armoniche. Funzioni armoniche coniugate.

Equazioni cartesiane di rette e semipiani. Zeri di polinomi; Teorema di Lucas. Serie numeriche: convergenza, criterio di Cauchy; convergenza assoluta. Serie armonica e serie armonica a segni alterni.

Funzione esponenziale. Funzioni trigonometriche. Periodo della funzione esponenziale. Il logaritmo complesso e suoi rami. Funzioni multivoche. Funzioni inverse di funzioni olomorfe e calcolo della loro derivata. Caratterizzazioni di funzioni olomorfe costanti. Funzioni olomorfe come applicazioni geometriche. Jacobiano ed esistenza della funzione inversa; omeomorfismi locali. Archi e angoli nel piano. Mappe conformi. Una funzione differenziabile determina una mappa conforme se e solo se è olomorfa e ha differenziale non nullo. Gruppo delle trasformazioni lineari fratte (GTLF); GTLF è generato dall'inversione insieme a tutte le traslazioni e le omotetie. L'unica TLF che fissa tre punti distinti l'identità.

La sfera di Riemann. Birapporto di quaterne di punti sulla sfera di Riemann. Invarianza del birapporto rispetto a TLF. Le TLF mandano cerchi (circonferenze e rette) in cerchi. Valori reali del birapporto. Il teorema della mappa di Riemann (solo enunciato).

2. Integrazione complessa

Integrale di una funzione complessa su una curva; indipendenza dalla parametrizzazione. Linearità e diseguaglianza del modulo. Forme differenziali di due variabili e loro integrali lungo curve chiuse. Differenziali esatti. Caratterizzazione di integrali che dipendono solo dagli estremi della curva di integrazione. Esempi.

Condizioni di anullamento di integrali lungo curve chiuse. Integrale della derivata di una funzione analitica. Fogli della funzione logaritmo e superficie di Riemann associata. Teorema di Goursat. Generalizzazioni al caso di funzioni con punti singolari. Teorema di Cauchy su dischi con generalizzazione al caso di funzioni con punti singolari. Indice (numero di avvitamento) di una curva chiusa rispetto ad un punto e sue proprietà . Formula integrale. Derivabilità di funzioni olomorfe, formula integrale per le derivate. Teorema di Morera, teorema di Liouville, teorema fondamentale dell'algebra.

3. Proprietà locali di funzioni analitiche
Singolarità eliminabili. Teorema di Taylor. Una funzione olomorfa è identicamente nulla se (e solo se) esiste un punto in cui il suo valore e quello di tutte le sue derivateè nullo. Ordine di un zero. L'insieme degli zeri di una funzione olomorfa (non nulla) è discreto; principio di idenitità per le funzioni olomorfe. Poli di una funzione olomorfa e loro ordine.

Caratterizzazione delle singolarità: poli e singolarità essenziali. Teorema di Casorati -Weierstrass. Numero degli zeri di una funzione olomorfa in un disco.

4. Formula generale del teorema di Cauchy Geometria locale delle mappe olomorfe: una mappa olomorfa è aperta. Principio del massimo. Lemma di Schwarz . Gruppi delle catene e dei cicli di una regione del piano complesso. Curve e cicli omologhi a zero in una regione. Regioni semplicemente connesse. Relazione di omologia per cicli e sua compatibilità con la struttura di gruppo. Teorema di caratterizzazione di regioni semplicemente connesse. Dimostrazione della forma generale del teorema di Cauchy. Conseguenze: esistenza della primitiva in regioni semplicemente connesse, analiticità delle determinazioni del logaritmo in regioni semplicemente connesse.

Connettività di regioni del piano e basi di omologia. Periodi per funzioni con singolarità isolate. Teorema dei residui. Principio dell'argomento. Teorema di Rouché.

5. Sviluppi in serie e prodotti

Teorema di Weierstass sulle successioni convergenti di funzioni olomorfe. Sviluppo in serie di Taylor di funzioni olomorfe. Teorema di Hurwitz.

Serie di Laurent. Definizione di prodotto infinito di numeri complessi, collegamento con la serie dei logaritmi e criterio di convergenza attraverso la serie dei logaritmi.
Criteri di convergenza per prodotti infiniti. Espressione in prodotto canonico di funzioni olomorfe: espressione canonica della funzione $\sin \pi z$. Teorema di Weierstrass.

La funzione Gamma di Eulero. Rappresentazione in prodotto canonico. Equazioni funzionali della funzione Gamma. Relazione con il prodotto fattoriale di numeri interi. Derivata logaritmica. Formula di duplicazione di Legendre. Costante di Eulero-Mascheroni. Calcolo dei residui della funzione Gamma. Rappresentazione della funzione Gamma come integrale di Eulero. Decomposizione di Mittag-Leffler per la funzione Gamma. Funzione zeta di Riemann. Relazione con la funzione Gamma. Rapresentazione della funzione zeta come Prodotto di Eulero.

Prolungamento analitico della funzione zeta di Riemann a tutto il piano complesso. Numeri di Bernouilli e zeri banali della zeta di Riemann.

Equazione funzionale della zeta di Riemann. Gli zeri banali della funzione zeta e l'ipotesi di Riemann.

Testi consigliati

[1] Ahlfors, Lars V, *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.*. McGraw-Hill Book Co., New York, (1978).

[2] Lang, Serge, *Complex analysis.*. Springer-Verlag, New York, (1999).

Bibliografia supplementare

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		☐ SI	■ NO
- esame finale	scritto	■ SI	☐ NO
	orale	■ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		☐ SI	■ NO