

# AM210 Analisi matematica, terzo modulo

A.A. 2010/2011

Prof. Giovanni Mancini

Funzioni di più variabili reali

## 1. Funzioni di due o più variabili reali: continuità, differenziabilità.

Struttura algebrica, prodotto scalare in  $\mathbf{R}^n$ , disuguaglianza di Cauchy–Schwartz. Norma e metrica in  $\mathbf{R}^n$ . Successioni convergenti. Insiemi aperti, chiusi, chiusura e frontiera di un insieme. Ricoprimenti aperti, da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento numerabile. Compattezza: gli insiemi chiusi e limitati hanno la proprietà del ricoprimento finito; caratterizzazione mediante successioni. Limiti di funzioni, continuità; caratterizzazione mediante successioni. I teoremi di Weierstrass e di Heine-Cantor. Connessione. Insiemi connessi per archi, teorema del valore intermedio.

Derivate parziali, direzionali. Funzioni lineari, differenziabilità, vettore gradiente. La differenziabilità implica parziale derivabilità (ma non viceversa), le funzioni  $C^1$  sono differenziabili. Significato geometrico di differenziale, di gradiente, piano tangente.

Il teorema del valor medio. Le funzioni a gradiente nullo sono localmente costanti. Le funzioni  $C^1$  sono localmente Lipschitziane. Derivazione lungo un cammino differenziabile.

Derivate successive, il teorema di Schwartz. La matrice Hessiana. Matrici simmetriche e forme quadratiche associate: definitezza, semidefinitezza e segno degli autovalori. La formula di Taylor al secondo ordine. Massimi e minimi liberi, condizioni necessarie/sufficienti.

Funzioni a valori vettoriali. Continuità, differenziabilità, matrice Jacobiana. Regola della catena.

## 2. Integrali dipendenti da parametro

Equidominanza e dipendenza continua, passaggio al limite sottosegno di integrale. Equidominanza e derivabilità sotto segno di integrale. Applicazioni: calcolo dell'integrale di Dirichlet, la funzione Gamma, la formula di Stirling. L'operazione di convoluzione, disuguaglianza di Young. Nuclei regolarizzanti, approssimabilità uniforme sui compatti delle funzioni continue mediante funzioni  $C^\infty$ . Il Teorema di approssimazione di Weierstrass. Convoluzione tra funzioni  $2\pi$ -periodiche, approssimazione uniforme di funzioni continue  $2\pi$  periodiche mediante polinomi trigonometrici.

### 3. Spazi metrici, il Principio delle Contrazioni

Spazi metrici, insiemi aperti/chiusi, convergenza, caratterizzazione sequenziale dei chiusi. Completezza. Spazi di Banach.  $C(K, \mathbf{R}^n)$ , dotato della norma della convergenza uniforme, è un Banach. Densità dei polinomi trigonometrici nello spazio delle funzioni  $2\pi$ -periodiche dotato della metrica della convergenza uniforme. Coefficienti e serie di Fourier e disuguaglianza di Bessel. Sviluppabilità in serie di Fourier. Regolarità e rapidità di convergenza dei coefficienti di Fourier.

Principio di identità, una funzione la cui serie di Fourier è assolutamente convergente è sviluppabile in serie di Fourier. Sviluppabilità in serie di Fourier di funzioni periodiche e di classe  $C^1$ .

Funzioni continue tra spazi metrici, contrazioni. Il Teorema delle contrazioni.

Sistemi di equazioni differenziali ordinarie, esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy. Dipendenza continua dai dati. Prolungabilità, esistenza globale; sistemi tipo gradiente, sistemi conservativi, Hamiltoniani. Sistemi lineari, matrice fondamentale, Wronskiano, la formula della variazione delle costanti.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] MARCELLINI P., C. SBORDONE, *Elementi di Analisi Matematica due*. Liguori, (2001).
- [2] L. CHIERCHIA, *Lezioni di Analisi Matematica 2*. Aracne, (1997).
- [3] ENRICO GIUSTI, *Analisi Matematica II*. Boringhieri, (1996).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [4] SILOV, *Analisi Matematica*. Editori Riuniti, (1978).
- [5] MARSDEN-WEINSTEIN, *Calculus II*. Springer, (1991).
- [6] BRAMANTI-PAGANI-SALSA, *Matematica*. Zanichelli, (2000).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO