GE220 Geometria 3

A.A. 2011/2012

Prof. Filippo Viviani

1. Topologia generale

Definizione di spazio topologico. Spazi metrici. Sottoinsiemi chiusi e operatore di chiusura. Operatore di interno, esterno e frontiera. Intorni e basi di intorni. Basi e sottobasi. Punti di accumulazione. Applicazioni continue. Topologie confrontabili.

ESEMPI: lo spazio metrico associato ad uno spazio pseudometrico; applicazioni lineari aperte o chiuse; topologia di Zariski; spazi lineari normati.

Sottospazi. Quozienti. Mappe quoziente aperte o chiuse. Prodotti finiti e infiniti.

ESEMPI: Operatori lineari e funzionali lineari su spazi vettoriali normati. Classificazione degli intervalli della retta reale. Gruppi topologici e loro azioni.

Successioni e limiti. Primo assioma di numerabilità. Successioni generalizzate. Proprietà di numerabilità: spazi topologici I numerabili, II numerabili, separabili, di Lindelöf. Proprietà di separabilità: spazi T0, T1, T2 (o di Hausdorff), T3 e T4. Spazi regolari e normali. Il Lemma di Urysohn. Il teorema di estensione di Tietze. Gli spazi metrici sono normali.

ESEMPI: spazi con le diverse proprietà di separatezza.

Spazi compatti e loro proprietà. Caratterizzazione tramite successioni generalizzate: punti di aderenza e sottosuccessioni generalizzate.

ESEMPI: Sottoinsiemi compatti dello spazio euclideo. Il teorema fondamentale dell'algebra. Le successioni usuali non bastano per caratterizzare la compatezza.

Variazioni sul concetto di compattezza: compattezza per successioni, compattezza numerabile, compattezza numerabile debole. Le diverse nozioni coincidono per spazi metrici. Compattezza e Hausdorffness implicano normalità. Compattezza per spazi metrici: completezza e totale limitatezza. Il completamento di uno spazio metrico.

ESEMPI: Metriche limitate, metriche su prodotti numerabili. Metriche non complete o non totalmente limitate su spazi non compatti. Teorema del punto fisso di Banach. Spazio di Frechet, spazio di Hilbert, cubo di Hilbert.

ESEMPI: Metrica di Hasdorff sui chiusi limitati di uno spazio metrico. Metrica di Baire sul prodotto numerabile della retta reale. La sfera e la proiezione stereografica.

Locale compattezza e paracompattezza: locale compattezza, Hausdorffness e II numerabilit implicano paracompatezza; paracompattezza e Hausdorffness implicano normalità. Applicazione: le variet topologiche sono localmente compatte, paracompatte e normali. Teorema di Stone (senza dimostrazione): gli spazi pseudometrici sono paracompatti. Spazi completamente regolari (o di Tychonoff). La compattificazione di

Stone-Cech di uno spazio completamente regolare: propriet di funtorialità, di massimalità; estensione di funzioni. Teoremi di metrizzabilità: teorema di Uryshon; teorema di Nagata-Smirnov (senza dimostrazione); teorema di Smirnov (senza dimostrazione).

ESEMPI: Gli spazi di Hausdorff localmente compatti sono Tychonoff, Sottospazi localmente chiusi vs localmente compatti di uno spazio di Haudorff localmente compatto, Compattificazione di Alexandroff.

Connessione e connessione per archi. Componenti connesse e componenti connesse per archi. Connessione locale e connessione locale per archi. Omotopia di mappe continue e omotopia di spazi topologici.

2. Gruppo fondamentale e rivestimenti

Il primo gruppo fondamentale di uno spazio topologico. Proprietà del primo gruppo fondamentale: dipendenza dalla componente connessa per archi; proprietà funtoriali; invarianza omotopica. Richiami sul prodotto libero di gruppi. Il teorema di van Kampen. Applicazione: le sfere di dimensione almeno due sono semplicemente connesse.

ESEMPI: Spazi di Peano. Spazi totalmente disconessi e 0-dimensionali. Spazio di Cantor.

Rivestimenti. Sollevamento di archi e omotopie tra archi. Esistenza e unicità del sollevamento di mappe continue. Rivestimento universale: unicità ed esistenza. Azione di monodromia. Classificazione dei rivestimenti connessi tramite sottogruppi del gruppo fondamentale. Il gruppo delle trasformazioni di rivestimento. Rivestimenti normali. Azioni libere e propriamente discontinue di gruppi.

ESEMPI: Il gruppo fondamentale della circonferenza e i suoi rivestimenti. Wedge di circonferenze. Grafi. Tori.

Testi consigliati

[1] E. Sernesi, *Geometria 2*. Boringhieri, (1995).
[2] N. Bourbaki, *General Topology, Volume 1*. Boringhieri, (1989).
[3] S. Willard, *General topology*. Dover Publications, (2004).
[4] J. L. Kelley, *General topology*. Springer, (1975).
[5] J. M. Munkres, *Topology: a first course*. Prentice Hall, (1974).
[6] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, (2001).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	□ SI	■ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO