AM5 Istituzioni di Analisi Superiore 1⁰

A.A. 1998/1999

Prof. Giovanni Mancini

Teoria della Misura

1. Misura di Lebesgue in R^N

Misura di Lebesgue in R^N , invarianza per traslazione, omogeneità. Misurabilità secondo Caratheodori, la classe degli insiemi misurabili è una σ-algebra. Invarianza per traslazione e per dilatazione della classe dei misurabili. Costruzione di un insieme non misurabile. Numerabile additività. I boreliani sono Lebesgue misurabili. Misura della differenza, della unione numerabile crescente, della intersezione numerabile decrescente. La misura di Lebesgue è Borel regolare, è σ-finita. Approssimazione da dentro, da fuori, mediante aperti, compatti. Un insieme di misura finita è misurabile sse può essere approssimato bene da dentro mediante compatti. Approssimabilità in media delle funzioni sommabili mediante funzioni continue a supporto compatto. I teoremi di Lusin e applicazioni; continuità in media delle traslazioni.

2. Integrale di Lebesgue in R^N

Funzioni misurabili. Le funzioni misurabili formano un'algebra. L'estremo superiore, inferiore, di una successione di funzioni misurabili è misurabile. Composizione di funzioni misurabili. Costruzione dell'insieme di Cantor, della funzione di Cantor-Lebesgue. Rappresentazione di funzioni misurabili non negative mediante funzioni caratteristiche. Integrale di una funzione semplice, di funzioni misurabili non negative. Sommabilità, integrale di una funzione sommabile. I teoremi di B.Levi, di Fatou, della convergenza dominata di Lebesgue. Linearità e numerabile additività dell'integrale. Diseguaglianza di Chebichef, funzioni a integrale nullo, assoluta continuità dell'integrale. Convergenza in misura e teorema di Vitali.

3. Teoria generale della misura e dell'integrazione

Misura su di un insieme X, la classe dei misurabili, proprietà di una misura. Funzioni misurabili, sommabilità, i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il teorema della media. Spazi L^p, diseguaglianze di Holder e di Minkowskii. Le funzioni semplici sono dense in L^p. Completezza di L^p. L^2 è uno spazio di Hilbert. Proiezioni ortogonali, diseguaglianza di Bessel, basi ortonormali in un Hilbert, il teorema di rappresentazione di Riesz. La misura prodotto ed i teoremi di Fubini e Fubini-Tonelli (dim. nel caso Euclideo). Misure assolutamente continue, singolari. Il teorema di Radon-Nikodym. Il teorema di decomposizione di Lebesgue. Un'applicazione: il duale di L^p è L^q, $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

4. Derivate e misure

Il Lemma di ricoprimento di Vitali ed il teorema di differeziazione di Lebesgue-Besicovitch. Derivata di Radon-Nikodym. Assoluta integrabilità e derivabilità quasi ovunque di $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f$, per f sommabile. Distribuzione di una misura, assoluta continuità di una misura/ della sua distribuzione. Misura μ_F (di Lebesgue-Stiltjes) generata da una funzione continua limitata, non decrescente F, assoluta continuità di μ_F . Derivabilità quasi ovunque delle funzioni assolutamente continue, la formula di Torricelli-Newton.

5. Convoluzione, spazi di Sobolev e problema di Dirichlet

Convoluzione di funzioni sommabili, commutatività, distributività, continuità: $\int |fg| \leq \int |f| \int |g|$. Nuclei regolarizzanti, convergenza L^1 della successione regolarizzante. Densità di $C_0^\infty(R^N)$ in L^1. Il teorema di compattezza di Frechet-Kolmogoroff. Convoluzione di funzioni C_0^∞ con il nucleo $|x|^{1-N}$. La formula $u(x) = c_N \int < u(y), x-y > /|x-y|^N$, le diseguaglianze di Poincarè e di Sobolev per funzioni C_0^∞. Formula di integrazione per parti e derivate deboli. Lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$, completezza. Approssimazione di funzioni $W^{1,2}$ mediante funzioni regolari. Lo spazio $H_0^1(\Omega)$, le diseguaglianze di Poincarè e Sobolev in $H_0^1(\Omega)$. Soluzioni deboli del problema di Dirichlet per il Laplaciano: esistenza ed unicità.

Testi consigliati

[1] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*. Boringhieri, ().
[2] L.C.Evans, R.F.Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. ERC Press, (1994).
[3] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle*. Masson, (1993).
[4] , .

Bibliografia supplementare

[5] E.H.Lieb, M.Loss, *Analysis*. AMS, (1997).
[6] S.B.Chae, *Lebesgue integration*. Springer, (1995).
[7] E.Hewitt, K.Stromberg, *Real and abstract analysis*. Springer, (1965).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		□ SI	■ NO

Gli studenti che hanno sostenuto con esito positivo, nel corso del semestre, le prove di valutazione parziali accedono direttamente al colloquio di verbalizzazione del voto proposto dal docente, da effettuarsi durante la prima sessione dèsame. Per tutti gli studenti che non si avvalgono delle valutazioni parziali, l'esame finale consiste in una prova scritta, comprendente anche domande di tipo teorico.