

GE1 Geometria (1^o Modulo)

A.A. 1998/1999

Prof. Giulio Campanella

1. Spazi vettoriali

Insiemi, applicazioni e relazioni d'equivalenza. Gruppi e sottogruppi. Anelli e campi. Omomorfismi, nucleo ed immagine.

La relazione di equipollenza tra segmenti orientati e lo spazio dei vettori geometrici. Definizione di spazio vettoriale su un campo K . Proprietà elementari degli spazi vettoriali. Esempi: lo spazio dei vettori geometrici; lo spazio K^n delle n -ple; lo spazio $M_{m,n}(K)$ delle matrici; lo spazio $K[x_1, \dots, x_n]$ dei polinomi a coefficienti in K .

Sottospazi vettoriali. Definizioni ed esempi. Intersezioni e somme di sottospazi vettoriali. Somme dirette.

Combinazioni lineari di vettori. Definizione di dipendenza e indipendenza lineare. Parallelismo e complanarità nello spazio dei vettori geometrici. Sottospazio vettoriale generato da vettori e sistemi di generatori di uno spazio vettoriale.

Basi di uno spazio vettoriale. Caratterizzazioni di una base. Coordinate di un vettore. La dimensione di uno spazio vettoriale. Alcuni risultati sugli spazi vettoriali: il teorema della dimensione; il teorema di completamento ad una base; il teorema di estrazione di una base da un sistema di generatori; la formula di Grassmann.

2. Matrici e sistemi di equazioni lineari

Generalità sulle matrici. Matrici simmetriche, antisimmetriche, triangolari, diagonali, ecc.. Il prodotto righe per colonne e le sue proprietà.

Matrici quadrate invertibili. Il gruppo $GL_n(K)$. Il sottogruppo delle matrici ortogonali.

Sistemi di equazioni lineari (abbr. SL): generalità, soluzioni, SL omogenei. La struttura dell'insieme delle soluzioni di un SL. SL a gradini e relative soluzioni.

L'algoritmo di Gauss-Jordan per la determinazione delle soluzioni di un SL.

Determinante di una matrice quadrata. Definizione e relative proprietà. Il teorema di Binét [dim. omessa]. Sottomatrici e complementi algebrici. Teorema di Laplace per il calcolo di un determinante [dim. omessa]. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata.

Rango di una matrice. Il "rango per righe" coincide con il "rango per colonne". Proprietà del rango.

Minori di una matrice. Il rango come ordine massimo dei minori non nulli.

Il teorema di Rouché-Capelli. Il teorema di Cramer. Il Teorema dei minori orlanti di Kronecker [dim. omessa]. Le soluzioni di un SL con il teorema di Rouché-Capelli. Le soluzioni di un SL omogeneo di rango massimo con $n - 1$ equazioni e n incognite.

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi vettoriali rispetto ad una base assegnata.

3. Spazi affini

Definizione di spazio affine. Esempi. Riferimenti affini e coordinate affini. Formule di cambiamento di coordinate affini.

Sottospazi affini. Definizione e proprietà. Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi affini.

Intersezioni di sottospazi affini. Sottospazi paralleli, incidenti e sghembi. Dimensione ed equazioni cartesiane dell'intersezione di due sottospazi affini.

Formule di geometria affine in dimensione 2 e 3: condizioni di allineamento e di complanarità; parallelismo tra rette, piani e retta-piano.

Fasci propri e impropri di iperpiani. Relativa rappresentazione.

4. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

Definizioni. Prime proprietà. Esempi. Isomorfismi tra spazi vettoriali. Operatori di proiezione e di simmetria parallelamente ad un sottospazio.

La somma di applicazioni lineari e la moltiplicazione per uno scalare. La composizione di applicazioni lineari. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Immagini e controimmagini di sottospazi. Il teorema "nullità + rango".

Lo spazio vettoriale $\text{Hom}_K(V^n, W^m)$ ha dimensione nm . Lo spazio duale di V . La base duale.

Rappresentazioni di applicazioni lineari. La matrice e le equazioni di un'applicazione lineare (rispetto a basi fissate). Effetto del cambiamento di base sulla matrice di un'applicazione lineare.

Equazioni cartesiane di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Equazioni cartesiane di immagini e controimmagini di sottospazi.

Autovalori e autovettori di un operatore lineare. Esempi. Autospazi e molteplicità geometrica. Autovettori associati a autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Diagonalizzabilità.

Polinomio caratteristico di un operatore lineare. Invarianza del polinomio caratteristico; la traccia ed il determinante sono invarianti. La molteplicità algebrica di un autovalore. La molteplicità geometrica è non superiore a quella algebrica. Condizioni di diagonalizzabilità per un operatore definito su uno spazio vettoriale complesso.

5. Forme bilineari

Definizione di forma bilineare. Esempi. La matrice di una forma bilineare e la sua espressione rispetto ad una base. Effetto di un cambiamento di base sulla matrice di una forma bilineare. Matrici congruenti. Ortogonalità.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] E.SERNESI, *Geometria I*. Boringhieri, (1989).
 [2] G.CAMPANELLA, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria, Vol. I,...,VIII*. Aracne, (1996).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] T. APOSTOL, *Calcolo. Vol.2. Geometria*. Boringhieri, (1977).
 [4] C.CILIBERTO, *Algebra Lineare*. Boringhieri, (1995).

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

L'esame consiste di una prova scritta comprendente anche domande di tipo teorico. Gli studenti che hanno superato le due prove d'esonero, svolte durante lo svolgimento del modulo, sono esentati dalla prova scritta finale.

Gli studenti che, insoddisfatti dei risultati della loro prova scritta o degli esoneri, desiderano tentare di migliorare il voto ottenuto possono sostenere una prova orale, che si svolgerà secondo una delle seguenti modalità [che verranno concordate col docente]:

- (i) una prova orale 'tradizionale' su tutto il programma del modulo.
 (ii) l'esposizione di una tesina attinente agli argomenti svolti nel programma, che verrà assegnata allo studente con 24 ore di anticipo.

N.B. Gli studenti che, avendo conseguito la votazione di 30/30, aspirano alla lode dovranno esporre una tesina scelta dal docente secondo le modalità sopra indicate.