# AM3 Analisi Matematica ($3^0$ Modulo)
# A.A. 1999/2000

**Prof. Luigi Chierchia**

**Funzioni di più variabili reali**

## 1. Regolarità di funzioni reali di $n$ variabili reali.

Norme su $\mathbb{R}^n$. Disuguaglianza di Cauchy. Topologia standard in $\mathbb{R}^n$. Compattezza e connessione. Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Massimo e minimo limite. Teoremi di Weierstrass (sull'esistenza di massimi e minimi) e di Heine–Borel. Derivate parziali e direzionali. Differenziale. Differenziabilità $\Longrightarrow$ continuità ed esistenza delle derivate direzionali. $C^1 \Longrightarrow$ differenziabilità. Derivate successive e lemma di Schwarz. Funzioni $C^k(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Controesempi (funzioni con derivate direzionali ma non continue in $x_0$; funzioni differenziabili ma non $C^1$ in $x_0$; funzioni con derivate miste diverse). Derivazione di funzioni composte. Formula di Taylor (varie formulazioni e corollari). Punti critici: condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi o minimi locali. Differenziabilità di funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$, matrici Jacobiane e regole per la derivazione di funzioni composte vettoriali.

## 2. Successioni di funzioni.

Successioni di funzioni da $A \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$: convergenza puntuale e convergenza uniforme. Il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua. Lo spazio di Banach delle funzioni continue con la norma dell'estremo superiore. Teoremi sulla derivazione ed integrazione di successioni di funzioni. Derivazione sotto segno di integrale. Lo spazio di Banach delle funzioni $C^1$. Teorema di Ascoli–Arzela. Formula di Stirling. Generalità sulle serie di funzioni, convergenza totale.

## 3. Serie di potenze.

Serie di potenze in $\mathbb{R}$: teorema di Hadamard (sul raggio di convergenza); derivazione ed integrazione di serie di potenze; tasso di crescita dei coefficienti di una serie di potenze. Funzioni reali analitiche (in una variabile): definizione e caratterizzazione in termini di crescita delle derivate; espansione in serie di Taylor delle funzioni trascendenti elementari. Funzioni $C^\infty$ ma non reali analitiche (esempi); funzioni $C^\infty$ a supporto compatto (incluso esempi di funzioni che valgono uno su di un intervallo). Serie di potenze in $C$: teorema di Hadamard; definizione di derivata complessa e funzioni olomorfe; le serie di potenze sono funzioni olomorfe e la loro derivata ha lo stesso raggio di convergenza. Le funzioni $\exp z$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$: definizioni per serie, teorema di addizione, relazioni elementari, formula di Eulero; definizione analitica di $\pi$; proprietà di periodicità; proprietà di iniettività. Funzioni reali analitiche di $n$ variabili; funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto.

**4. Teorema delle funzioni implicite ed applicazioni.**

Norme su matrici (incluso il calcolo esplicito della norma $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$). Lemma delle contrazioni. Teorema delle funzioni implicite. Stime esplicite su domini e codomini di funzioni implicite. Regolarità di funzioni implicite. Teorema della funzione inversa. Applicazione al calcolo dei massimi e minimi vincolati (metodo dei moltiplicatori di Lagrange incluso il caso di più vincoli).

## Testi consigliati

[1] L. Chierchia, *Lezioni di Analisi 2*. Aracne, (1997).

## Bibliografia supplementare

[2] E. Giusti, *Analisi 2*. Boringhieri, (1989).
[3] W. Rudin, *Principi di Analisi Matematica*. McGraw-Hill, (1991).

## Modalità d'esame

| | | | |
|---|---|---|---|
| - valutazione in itinere ("esoneri") | | ■ SI | □ NO |
| - esame finale | scritto | ■ SI | □ NO |
| | orale | □ SI | ■ NO |
| - altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto) | | □ SI | ■ NO |