

From campanel@mat.uniroma1.it Wed Dec 13 15:54:37 2000 Date: Mon, 22 May 2000 11:42:0100 From: Giulio Campanella <jcampanel@mat.uniroma1.it> To: programmi@web.mat.uniroma3.it Subject: GE2.TEX

[ Part 1, Application/APPLEFILE 14KB. ] [ Unable to print this part. ]

## **GE2 Geometria (2<sup>o</sup> Modulo)**

A.A. 1999/2000

**Prof. Giulio Campanella**

### **1. Forme bilineari simmetriche e prodotti scalari**

Definizione di forma bilineare. Esempi. La matrice di una forma bilineare e la sua espressione rispetto ad una base. Effetto di un cambiamento di base sulla matrice di una forma bilineare. Matrici congruenti. Ortogonalità.

Forme bilineari simmetriche e forme quadratiche. Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica. Algoritmo di Lagrange. Teorema di Sylvester.

Prodotti scalari e spazi vettoriali euclidei. Esempi: il prodotto scalare canonico. Forme bilineari simmetriche non degeneri. Caratterizzazione delle matrici di prodotto scalare (Teor. di Jacobi-Sylvester) [dim. omissa]. Basi ortonormali e matrici ortogonali. Classificazione delle matrici ortogonali di ordine due. Norma di un vettore. Proprietà della norma. Il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. La disuguaglianza triangolare. Angolo convesso tra vettori. Angoli orientati (rispetto a basi ortonormali). Prodotto vettoriale e prodotto misto (in spazi vettoriali euclidei di dimensione tre) e relative proprietà.

### **2. Spazi euclidei**

Definizione di spazio euclideo. Esempi. Riferimenti cartesiani e coordinate cartesiane. Cambiamenti di riferimento cartesiano. Vettore normale e retta normale a un iperpiano. Distanza euclidea tra punti e tra sottospazi euclidei.  $n$ -sfere. Distanza punto-iperpiano. Coordinate polari in un piano euclideo. Formule di geometria euclidea piana: condizioni di ortogonalità tra rette; distanza punto-retta; angoli tra rette. Formule di geometria euclidea nello spazio: condizioni di ortogonalità tra rette e piani; distanze tra rette e piani; angoli tra rette, tra piani e tra retta e piano. Orientazioni di rette e piani.

### **3. Operatori autoaggiunti e unitari**

L'aggiunto di un operatore lineare in uno spazio vettoriale euclideo. Operatori autoaggiunti (o simmetrici) e relativa rappresentazione. Esempi: operatori di proiezione ortogonale. Il polinomio caratteristico di una matrice reale simmetrica ha autovalori reali. Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti. Diagonalizzazione ortonormale di una forma bilineare simmetrica.

Operatori unitari. Esempi: operatori di simmetria ortogonale. Proprietà e rappresentazione di operatori unitari. Gli operatori unitari speciali.

### **4. Affinità e isometrie**

Definizione di affinità. Il gruppo delle affinità. Proprietà e rappresentazione delle affinità. Sottogruppi del gruppo delle affinità: traslazioni, affinità che fissano un punto, omotetie. Il teorema fondamentale delle affinità. La relazione di equivalenza affine.

Definizione di isometria. Il gruppo delle isometrie. Proprietà e rappresentazione delle isometrie. Studio delle isometrie piane. Le glissoriflessioni. Il teorema di classificazione delle isometrie piane (teor. di Chasles). Studio delle isometrie nello spazio euclideo tridimensionale. Proprietà delle rotazioni. Altri tipi di isometrie dello spazio euclideo tridimensionale. Il teorema di classificazione (teor. di Eulero) [solo enunciato].

## 5. Geometria proiettiva

Proiettificazione di uno spazio vettoriale. Lo spazio proiettivo numerico  $n$ -dimensionale. Riferimenti e coordinate proiettive. Riferimenti proiettivi equivalenti. Punti linearmente indipendenti e punti in posizione generale. Riferimenti proiettivi definiti tramite punti in posizione generale. Cambiamenti di riferimento proiettivo.

Sottospazi proiettivi. Il sottospazio generato da un sottoinsieme. Intersezione di sottospazi. La formula di Grassmann proiettiva. Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi proiettivi. Proiezione da un punto su un iperpiano. Fasci di iperpiani.

Spazi affini e spazi proiettivi. Applicazioni di omogeneizzazione da uno spazio affine ad uno spazio proiettivo. Punti impropri e iperpiano improprio. La proiettificazione di sottospazi affini e la affinizzazione di sottospazi proiettivi. Punti impropri.

Definizione di proiettività. Il gruppo delle proiettività. Proprietà e rappresentazione delle proiettività. Il teorema fondamentale delle proiettività.

Le affinità sono in corrispondenza biunivoca con le proiettività che fissano un iperpiano: proiettificazione di un'affinità ed affinizzazione di una proiettività.

## 6. Coniche

Generalità sulle curve algebriche piane affini, euclidee e proiettive. Il supporto e l'equazione di una curva algebrica piana.

Le coniche proiettive. Loro rappresentazione e rango. La trasformata di una conica proiettiva tramite proiettività. La relazione di equivalenza proiettiva. Forme canoniche di coniche proiettive. Il problema della classificazione e della riduzione a forma canonica. Classificazione delle coniche proiettive complesse e reali.

Le coniche affini. Generalità, rappresentazione, rango. Coniche a centro e parabole. La trasformata di una conica affine tramite affinità. La relazione di equivalenza affine. Classificazione delle coniche affini complesse e reali. Ellissi e iperboli affini. Gli asintoti di un'iperbole.

Le coniche euclidee. Generalità. La relazione di congruenza. La classificazione e la riduzione a forma canonica delle coniche euclidee. Grafici delle forme canoniche. Assi di simmetria (facoltativo).

## TESTI CONSIGLIATI

[1] E.SERNESI, *Geometria I*. Boringhieri, (1989).

[2] G.CAMPANELLA, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria, Vol. IV, ..., VIII*. Aracne, (1996).