

**Università degli studi di Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002**  
**Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone**  
Lunedì 1 ottobre

1. Sia  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Stabilire quali fra i seguenti sottoinsiemi di  $C = A \times B$  sono grafici di funzioni:

- a)  $E = \{(a, 3), (b, 3), (c, 6), (f, 4)\}$
- b)  $E = \{(a, 2), (b, 7), (c, 4), (c, 5), (e, 6), (f, 1)\}$
- c)  $E = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 2), (e, 2), (f, 2)\}$
- d)  $E = \{(a, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 2), (e, 6), (f, 5)\}$

2. Stabilire quali fra i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sono grafici di funzioni:

- a)  $E = \{(x, y); x + y = 5\}$
- b)  $E = \{(x, y); x^2 + y = 5\}$
- c)  $E = \{(x, y); x + y^2 = 5\}$
- d)  $E = \{(x, y); x^2 + y^2 = 5\}$

3. Stabilire quali tra le seguenti funzioni sono iniettive e quali suriettive:

- a)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 3n + 3$
- b)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(n) = 5n - 2$
- c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
- d)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x^2$
- e)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto \frac{x-4}{x-6}$  se  $x \neq 6$  e  $6 \mapsto 1$

4. Siano  $X, Y$  e  $Z$  tre insiemi e  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  definite nel modo seguente:

- a)  $f(x) = x^2, g(y) = y + 3;$
- b)  $f(x) = 2x + 6, g(y) = y^3;$
- c)  $f(x) = 6x^4, g(y) = y;$
- d)  $f(x) = x - 2, g(y) = \sqrt{y}.$

Si calcoli  $g \circ f$ .

5. Date  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto 3n$ , e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \{y \in \mathbb{R}; -1 \leq y \leq 1\}, x \mapsto \sin(x\pi) + 2$ , stabilire se  $g \circ f$  è iniettiva e/o suriettiva.

6. Date  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$ , e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ; verificare che  $f \circ g \neq g \circ f$ .

7. Date  $f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, y^2 - 1)$ , e  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (z, w) \mapsto \frac{w}{z-1}$ . Determinare se  $g \circ f$  è iniettiva e/o suriettiva.

8. Sia  $A$  un insieme finito. Dimostrare che una funzione  $f: A \rightarrow A$  è iniettiva se e soltanto se essa è suriettiva. Se  $A$  è un insieme infinito questo risultato è ancora vero?

9. Siano  $A$  e  $B$  due insiemi ed  $E, F \subseteq A$  due sottoinsiemi di  $A$ . Data un funzione  $f: A \rightarrow B$  dimostrare che

- a)  $f(E \cup F) = f(A) \cup f(B);$

- b)  $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$ . Determinare inoltre una condizione sufficiente affinché  $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$ .