

Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Algebra 1- Lavoro Guidato - Dr. Francesca Tartarone
Lunedí 22 ottobre

1. Mostrare, per induzione, che per ogni numero naturale $n \geq 1$: 8 divide $3^{2n} - 1$.
2. Mostrare, per induzione, che per ogni numero naturale $n \geq 1$, risulta

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

3. Sia S l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{N} , cioè $S = P(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$. Si consideri in S la relazione definita da:

$$X \leq Y \iff X = Y \quad \text{oppure} \quad x \leq y \quad \text{per ogni} \quad x \in X \quad \text{e} \quad y \in Y.$$

- a) Verificare che questa relazione è una relazione d'ordine;
 - b) Stabilire se S ha elementi massimali o minimali.
4. Sia $A = \{a, b, c, d\}$. Ordinare lessicograficamente $A \times A$ quando A è ordinato in uno dei seguenti modi:
 - a) $a \leq b \leq d$ e $a \leq c \leq d$;
 - b) $a \leq b \leq c$ e $b \leq d$.

5. Calcolare tutte le radici primitive 22-sime dell'unità.
6. Calcolare i polinomi ciclotomici $\Phi_4, \Phi_6, \Phi_8, \Phi_{13}$.
7. Se p è un numero primo, allora:

$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + 1.$$

Per ogni intero $r \geq 1$, si ha:

$$\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}}).$$

8. Se p è un numero primo, allora $\Phi_{2p}(X) = \Phi_p(-X)$.
- 9 Esprimere in forma polare i seguenti numeri complessi:

$$5, -1 - \sqrt{3}i, -6, -3 + \sqrt{3}i, \frac{1}{i}, 4 - 4i, -3i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \frac{-1}{1+i}.$$

- 10 Dimostrare che il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei loro moduli e l'argomento è la somma degli argomenti.

- 11 Se $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, dimostrare che se $\text{MCD}(n, m) = d > 1$, allora z^m è una radice $\frac{n}{d}$ -sima di 1.