

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato
Mercoledì 3 ottobre

1. Siano $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{a, b, c\}$; scrivere esplicitamente tutte le applicazioni da X in Y e stabilire quali di esse sono iniettive. Quante sono le applicazioni da Y in X ?

2. (i) Provare che la composizione di due applicazioni suriettive è suriettiva.
(ii) Provare che la composizione di due applicazioni iniettive è iniettiva.

3. Sia $f : \mathbf{R} - \{\frac{2}{3}\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{\frac{2}{3}\}$ l'applicazione definita per $x \in \mathbf{R} - \{\frac{2}{3}\}$ da $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$.

- (i) Verificare che f è biiettiva.
(ii) Determinare esplicitamente f^{-1} .

4. Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ applicazioni tali che $g \circ f = id_X$. Stabilire quali delle seguenti proposizioni sono vere:

- (i) g è iniettiva
(ii) f è iniettiva
(iii) g è suriettiva
(iv) f è suriettiva
(v) f è invertibile e $g = f^{-1}$.

5. Sia $f : X \longrightarrow X$ un'applicazione tale che $f \circ f = id_X$. Verificare che f è biiettiva.

6. Sia X un insieme non vuoto; se A e B sono sottoinsiemi di X , provare che per ogni $x \in X$ si ha che:

- (i) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
(ii) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;
(iii) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)[1 - \chi_B(x)]$.

7. (i) Determinare esplicitamente una applicazione iniettiva da \mathbf{Z} in \mathbf{N} .
(ii) Determinare esplicitamente una applicazione suriettiva da \mathbf{N} su \mathbf{Z} .

8. Sia $X = \{1, 2, 3\}$. Determinare su S una relazione (binaria) ρ che goda della proprietà simmetrica, transitiva e non riflessiva. Esiste una relazione ρ soddisfacente alle condizioni precedenti e con almeno 3 elementi nel grafico?