Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato
Mercoledi 14 novembre

1. Sia a un intero fissato $\neq 0$. Si consideri in $\mathbf{Z}$ l'operazione binaria $*$ definita da:

$$x * y = x + y - a$$

con x, y numeri interi.

1. Verificare che $*$ è associativa e commutativa.
2. Stabilire se $(\mathbf{Z}, *)$ è un gruppo.

2. Nell'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \diamond (c, d) = (a + c, b + c).$$

1. Stabilire se $\diamond$ è associativa.
2. Stabilire se $\diamond$ è commutativa.
3. Stabilire se esiste un elemento neutro rispetto a $\diamond$.

3. Sia $H = \{(a, b) \quad | \quad a, b \in \mathbf{Q}, \quad a \neq 0\}$. Stabilire se H è un gruppo rispetto alla seguente operazione: per $(a, b), (c, d) \in H$

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, b + ad).$$

4. Nel gruppo $S(\mathbf{R}^2)$ delle biiezioni di $\mathbf{R}^2$ in sè si considerino gli elementi f e g così definiti:

$$f : (x, y) \longmapsto (-x, -y)$$
$$g : (x, y) \longmapsto (2 - x, 2 - y).$$

1. Determinare il periodo do f e di g.
2. Provare che $g \circ f$ è aperiodico.

5. Esprimere le seguenti permutazioni come prodotto di cicli disgiunti e poi come prodotto di trasposizioni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'ordine e la parità di f e di g.