Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002
ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli (Prof. S. Gabelli)
ESERCIZI - 20 Ottobre 2001

Sia $\mathcal{S}$ un insieme non vuoto e sia $P(\mathcal{S})$ l'insieme delle parti di $\mathcal{S}$. Definiamo in $P(\mathcal{S})$ le seguenti operazioni:
$\mathcal{X}+\mathcal{Y}=(\mathcal{X}\cup\mathcal{Y})\setminus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ (*differenza simmetrica*) ; $\mathcal{X}\mathcal{Y}=(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$.

1. Mostrare che:

(a) $(P(\mathcal{S}),+,\cdot)$ è un anello commutativo unitario (dare per scontato che le operazioni sono associative e che vale la proprietà distributiva);

(b) Ogni elemento di $P(\mathcal{S})$ diverso da 0 e 1 è uno zerodivisore;

(c) Ogni elemento di $P(\mathcal{S})$ coincide con il suo opposto ed è idempotente;

(d) $(P(\mathcal{S}),+,\cdot)$ è un campo se soltanto se $\mathcal{S}$ ha un solo elemento;

(e) L'insieme $P_{fin}(\mathcal{S})$ dei sottoinsiemi finiti di $\mathcal{S}$ è un ideale di $P(\mathcal{S})$;

(f) Per ogni sottoinsieme proprio $\mathcal{X}$ di $\mathcal{S}$, $P(\mathcal{X})$ è un sottoanello di $P(\mathcal{S})$. Inoltre $P(\mathcal{X})$ è unitario, ma la sua unità è differente da quella di $P(\mathcal{S})$;

(g) Per ogni sottoinsieme $\mathcal{X}$ di $\mathcal{S}$, $P(\mathcal{X})$ è un ideale principale di $P(\mathcal{S})$.

2. Mostrare che, per ogni sottoinsieme $\mathcal{X}$ di $\mathcal{S}$, l'applicazione
$$\eta : P(\mathcal{S}) \longrightarrow P(\mathcal{X})\,;\ \mathcal{Z}\to\mathcal{Z}\cap\mathcal{X}$$
è un omomorfismo di anelli.

Determinare il nucleo e l'immagine di questa applicazione ed esplicitare l'isomorfismo $\frac{P(\mathcal{S})}{Ker(\eta)} \longrightarrow Im(\eta)$.

3. Mostrare che, per ogni sottoinsieme $\mathcal{X}$ di $\mathcal{S}$, l'*immersione*
$$\iota : P(\mathcal{X}) \longrightarrow P(\mathcal{S})\,;\ \mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$$
è un omomorfismo di anelli in cui, se $\mathcal{X}\neq\mathcal{S}$, l'immagine dell'unità del dominio non è l'unità del codominio.

4. Sia $\mathcal{S}=\{s_1,\dots,s_n\}$ un insieme finito. Per ogni sottoinsieme $\mathcal{Y}$ di $\mathcal{S}$ sia
$$\Phi_{\mathcal{Y}} : \mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{Z}_2$$
la *funzione caratteristica* di $\mathcal{Y}$, definita da
$$\Phi_{\mathcal{Y}}(s)=\bar{0} \text{ se } s\notin\mathcal{Y} \quad \text{e} \quad \Phi_{\mathcal{Y}}(s)=\bar{1} \text{ se } s\in\mathcal{Y}.$$
Mostrare che l'applicazione
$$P(\mathcal{S})\longrightarrow\mathbb{Z}_2^n \ \ ; \ \ \mathcal{Y}\longrightarrow(\Phi_{\mathcal{Y}}(s_1),\dots,\Phi_{\mathcal{Y}}(s_n))$$
è un isomorfismo di anelli.

Esplicitare poi tale isomorfismo per $n=3$.