Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 10 - 26 Ottobre 2001

1. Effettuare la divisione euclidea di $13+18i$ per $5+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che i possibili quozienti (e rispettivi resti) sono quattro.

2. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I=(1+3i)$ e $J=(3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$, IJ e $I\cap J$.

3. Mostrare che un numero primo $p\in\mathbb{Z}$ è un elemento primo di $\mathbb{Z}[i]$ se e soltanto se non è somma di due quadrati in $\mathbb{Z}$.

4. Stabilire se 3 e $3+i$ sono elementi irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$.

5. Determinare i fattori irriducibili di 8 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Stabilire se $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ è o no a fattorizzazione unica.

6. Dimostrare che, nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, gli elementi 5 e $2+i\sqrt{6}$ hanno massimo comune divisore uguale ad 1 , ma per 1 non esiste una identità di Bezout.

Dimostare poi che gli elementi 10 e $4+2i\sqrt{6}$ non hanno massimo comune divisore.

L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ è a fattorizzazione unica?

7. Sia $a\in\mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che se la norma di a è un numero primo, allora l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(a)$ un campo.

8. Mostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(3)$ è un campo con un numero finito di elementi. Se poi $a=5+i$, determinare l'inverso della classe di a.

9. Sia $a=2+2i\in\mathbb{Z}[i]$. Determinare esplicitamente gli elementi dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(a)$. Stabilire quali tra essi sono invertibili e quali sono zerodivisori.

10. Stabilire se l'ideale $I=(X^2,5X)$ è principale in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$, giustificando le risposte.