Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 6 - 15 Ottobre 2001

1. Verificare che, se A e B sono anelli (commutativi, unitari), allora $A \times B$ è un anello (commutativo unitario) con le operazioni indotte da quelle sulle componenti:

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')\,; \quad (a,b)(a',b') = (aa', bb').$$

2. Verificare che, se S è un insieme e A e' un anello (commutativo unitario), allora l'insieme A^S di tutte le funzioni da S ad A è un anello con le operazioni "puntuali" definite da

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)\,; \quad (fg)(s) = f(s)g(s).$$

3. Verificare che l'insieme

$$F = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$$

è un campo, rispetto alle usuali operazioni di somma e moltiplicazione di matrici.

4. Verificare che i seguenti insiemi numerici sono anelli:

$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, a, b \in \mathbb{Z}\}\,;\ \mathbb{Q}[i] = \{a+bi, a, b \in \mathbb{Z}\}\,;\ \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\,;\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

Quali tra essi sono campi?

5. Mostrare che un elemento a di un anello A non può essere allo stesso tempo invertibile e zerodivisore.

6. Un elemento a di un anello A si dice *idempotente* se $a^2 = a$.

Mostrare che, se A è integro, allora gli unici elementi idempotenti di A sono 0 e 1 .

7. Determinare gli elementi invertibili e gli elementi idempotenti dell'anello $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ delle matrici quadrate ad elementi in $\mathbb{Z}_2$.

8. Un elemento a di un anello A si dice *nilpotente* se $a^k = 0$ per qualche $k \geq 1$.

Mostrare che, se $n = {p_1}^{k_1} \dots {p_s}^{k_s}$ è la fattorizzazione di n in numeri primi, allora $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e soltanto se p_1 divide a per $i = 1, \dots , s$.

Da questo fatto, dedurre che, se p è primo, ogni elemento di $\mathbb{Z}_{p^k}$ è invertibile oppure nilpotente.

9. Sia A un anello. Mostrare che il polinomio $u + aX \in A[X]$ è invertibile se e soltanto se u è invertibile ed a è nilpotente.

Determinare poi esplicitamente l'inverso del polinomio $\bar{5} + \bar{6}X \in \mathbb{Z}_{12}[X]$.

10. Mostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Z}_n$ se e soltanto se $A = \bar{d}\mathbb{Z}_n$, dove d è un divisore di n.