Universitá degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
Lavoro guidato (a cura di Giampaolo Picozza)
Martedí 23 ottobre

1. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un anello euclideo rispetto alla valutazione $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $N(a + ib) = a^2 + b^2$.

2. Trovare $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $z_1 = qz_2 + r$ e $0 \leq N(r) < N(z_2)$ per:

(i) $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = 3 - i$;

(ii) $z_1 = 2 + 7i$ e $z_2 = 3 + 2i$;

(iii) $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 4 - 3i$.

3. Trovare $MCD(z_1, z_2)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $\lambda z_1 + \mu z_2 = MCD(z_1, z_2)$ per:

(i) $z_1 = 5 + i$ e $z_2 = 1 - 4i$.

(ii) $z_1 = 5$ e $z_2 = 4 + 2i$

4. Si consideri l'insieme $I = \{m + ni, m, n \text{ pari }\} \subseteq \mathbb{Z}[i]$.

(i) Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.

(ii) Trovare un generatore di I.

(iii) Determinare se I è primo.

(iv) Determinare se I è massimale.

(v) Scrivere esplicitamente gli elementi di $\mathbb{Z}[i]/I$ e determinare quali sono invertibili e quali zero divisori.

5. Sia $I = (7)$ l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $7 \in \mathbb{Z}[i]$.

(i) Determinare se I è massimale.

(ii) Determinare, nel quoziente $\mathbb{Z}[i]/I$, l'inverso della classe di $2 + i$.

6. Sia $I = (2 + i)$ l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $2 + i \in \mathbb{Z}[i]$.

(i) Determinare se I è massimale.

(ii) Determinare, nel quoziente $\mathbb{Z}[i]/I$, l'inverso della classe di $1 + i$.