

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 2 - 24 Settembre 2001

1. Dimostrare che in un qualsiasi gruppo $(G, *)$ valgono le leggi di cancellazione, ovvero che, per ogni $a, g, h \in G$:

$$\begin{aligned} a * g = a * h &\Rightarrow g = h \text{ (cancellazione a sinistra) ;} \\ g * a = h * a &\Rightarrow g = h \text{ (cancellazione a destra).} \end{aligned}$$

2. Sia $(G, *)$ un gruppo. Dimostrare che, se ogni elemento è inverso di se stesso, allora G è commutativo.

3. Dimostrare che ogni gruppo di 3 elementi è ciclico.

4. Determinare tutti gli elementi di ordine 2 e di ordine 3 di S_4 .

5. Determinare il gruppo delle simmetrie del quadrato.

6. Sia (G, \cdot) un gruppo e $g \in G$. Mostrare che se g ha ordine n , allora g^a ha ordine n/d , dove $d = MCD(a, n)$.

7. Determinare i generatori di $(\mathbb{Z}_n, +)$ per $n = 5, 12, 26$.

8. Verificare che i seguenti gruppi sono ciclici e determinare tutti i loro generatori: $U(\mathbb{Z}_{10}), U(\mathbb{Z}_{11}), U(\mathbb{Z}_{25})$.

9. Determinare tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi ciclici:

(i) il gruppo delle radici 15-esime dell'unità;

(ii) $U(\mathbb{Z}_{25})$.