Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 3 - 1 Ottobre 2001

1. Determinare tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi:

$$(\mathbb{Z}_{20}, +), (U(\mathbb{Z}_{32}), \cdot), (D_4, \circ), (\mathbf{A}_4, \circ).$$

Determinare poi le classi laterali destre (rispettivamente sinistre) di ogni sottogruppo e verificare che esse formano una partizione del gruppo.

2. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $g \in G$. Mostrare che g e g^{-1} hanno lo stesso ordine.

3. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $Z(G)$ l'insieme degli elementi di G che permutano con ogni altro elemento, ovvero

$$Z(G) = \{x \in G\,;\, xg = gx \quad \text{per ogni} \quad g \in G\}.$$

$Z(G)$ si dice il *centro* di G.

(a) Mostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G. Inoltre G è commutativo se e soltanto se $G = Z(G)$;

(b) Determinare il centro di $(\mathbf{S}_3, \circ)$ e $(D_4, \circ)$.

4. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia S un sottoinsieme di G. Mostrare che il sottogruppo di G generato da S è

$$< S >= \{s_1^{z_1} \dots s_n^{z_n}\,;\, n \geq 1, z_i \in \mathbb{Z} \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, n\}.$$

5. Mostrare che i numeri primi generano il gruppo moltiplicativo dei numeri razionali non nulli.

6. Mostrare che le permutazioni $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ di $\mathbf{S}_4$ sono prodotto di 3-cicli. Dedurne che $\mathbf{A}_4$ è generato dai 3-cicli.

Usando il fatto che $(1x)(1y) = (1yx)$, mostrare poi che, più in generale, la permutazione $(ab)(cd)$ di $\mathbf{S}_n$ è prodotto di 3-cicli e dedurne che $\mathbf{A}_n$ è generato dai 3-cicli.

7. Mostrare che il numero degli r-cicli distinti di $\mathbf{S}_n$ è $\frac{n!}{(n-r)!r}$.