Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 4 - 2 Ottobre 2001

1. Mostrare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi e determinarne nucleo e immagine:

$(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \quad x \longrightarrow e^x$;

$(\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +) \quad x \longrightarrow ln(x)$;

$(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \quad x \longrightarrow ax$, dove $a \geq 0$ è fissato;

$(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (C_n, \cdot) \quad x \longrightarrow \zeta^x$, dove dove $\zeta \in C_n$ è una radice n-sima dell'unità fissata;

$(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot) \quad x \longrightarrow cos(2\pi x) + sen(2\pi x)$;

$(\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot) \quad x \longrightarrow \frac{x}{|x|}$.

2 Mostrare che la composizione di due omomorfismi è un omomorfismo.

3 Mostrare che la funzione inversa di un isomorfismo è un isomorfismo.

4. Determinare il gruppo quoziente di $(\mathbb{Z}_{21}, +)$ rispetto al sottogruppo generato da $[7]_{21}$.

5. Determinare il gruppo quoziente di $(\mathbb{Z}_n, +)$ rispetto al sottogruppo N generato da $[a]_n$.

6. Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo normale.

Determinare poi il centro $Z(\mathbf{H})$ del gruppo $\mathbf{H}$ delle unità dei quaternioni e costruire il gruppo quoziente $\frac{\mathbf{H}}{Z(\mathbf{H})}$.