Soluzioni e suggerimenti del Tutorato di AM1b Serie

Fabrizio Fanelli

Studiare il comportamento delle seguenti serie

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$

Usare il criterio del confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, che converge.Poiché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n - n} = 1$ la serie converge.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

Usare il criterio del confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che converge. Poiché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 0$ la serie converge.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + n - 1}}$

Usare il criterio del confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che diverge. Poiché $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}}} = 1$ la serie diverge.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n^2}$

Uso il criterio del confronto : $\displaystyle\sin^2 \frac{1}{n^2} < \left(\frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n^4}$, e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ converge , allora la mia serie converge .

5)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

Usare il criterio del confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: la serie diverge.

6)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n}$

usare il criterio della radice : $\displaystyle\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n}} = \frac{n+1}{3n-1} \to 1/3$ che minore di 1 allora la serie converge.

7)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n}}{2^{n} n!}$

verificare la condizione sufficente se si conosce la formula di "Stirling" oppure usare il criterio del rapporto : $\displaystyle\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^{n} n!}{n^{n}} = \frac{(n+1)^{n}}{2n^{n}} \to +\infty$ allora la serie diverge

8)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

usare confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ che converge : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} \to 1$ allora le serie si comportano allo stesso modo .

9)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\sin x - \frac{1}{2}|^{n}$

Usando il crieterio delle radice : $\sqrt[n]{|\sin x - \frac{1}{2}|^{n}} \to |\sin x - \frac{1}{2}| < 1 \ \forall x \in (-\pi/6, 7\pi/6)$ quindi la serie converge in tale intervallo e diverge altrimenti . Osserva che per x= $-\pi/6$, $7\pi/6$ avrei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1$

10)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} + \frac{n^{2x}}{x} \quad x \neq 0$

La condizione necessaria è verificata se e solo se $-1 < x < 0$, inoltre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ è minorata dalla serie geometrica , che converge se —x—<1 e $\frac{n^{2x}}{x}$ è serie armonica generalizzata che converge se $x < -1/2$.In conclusione la serie converge se $x \in (-1, -1/2)$, altrimenti diverge.

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + \sin \frac{x}{n}}{n^x}$

la condizione è verificata sse $x \geq 0$ ora usate il criterio del confronto : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + \sin \frac{x}{n}}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^x}$ che converge per $x > 1$, la serie converge anche per x=0.

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

usare il criterio del rapporto : $\frac{\frac{|x|^n}{n!}}{\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{|x|}{n} \to 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ allora la serie converge sempre .

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!} x^2 n$

usare il criterio della redice : $\displaystyle\frac{(2(n+1))^{2(n+1)}}{(2(n+1))! x^{2(n+1)}} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n} x^{2n}} =$

$x^2 \frac{2n+2}{2n+1} \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^{2n} \to |x|^2 e^2$ che minore di 1 se $|x| < 1/e$ (converge) e maggiore se $|x| > 1/e$ (diverge) se $x = 1/e$ usare Stirling (diverge) .

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1+3x}\right)^n$

usare il criterio della radice .

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$

Se $x \leq 0$ non verificata la condizione necessaria , per $x > 0$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{n^2 x}} < \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{e}\right)^x\right]^{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{e}\right)^x\right]^n$ che una serie geometrica , allora la nostra serie converge .