I ESONERO DI AM1b - ANALISI MATEMATICA
Prof. M. Girardi
(08/04/2002)

ESERCIZIO 1
Trovare i punti di accumulazione del seguente insieme:

$$A = \left\{ -2 + \frac{1}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

L'insieme e' discreto, dato che puo' essere messo in corrispondenza con i numeri naturali, quindi tutti i punti dell'insieme sono isolati. Il limite della frazione $\frac{1}{n^2+1}$ e' zero, quindi $-2+0$ e' un punto di accumulazione per l'insieme. Va dimostrato con la definizione: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : \ x \in I(-2, \varepsilon) \setminus \{-2\}$ ovvero $\exists x \neq -2, \ x \in A : |-2-x| < \varepsilon$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $-2 + \frac{1}{\overline{n}^2+1}$ un generico elemento di A. Si ha:

$$\left| -2+2-\frac{1}{\overline{n}^2+1} \right| = \left| \frac{1}{\overline{n}^2+1} \right| < \frac{1}{\overline{n}} < \varepsilon \iff \overline{n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

ESERCIZIO 2
Determinare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$B = \left\{ x = \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Giustificare le risposte usando la caratterizzazione di estremo superiore ed inferiore di un insieme.
L'insieme e' costituito da numeri ottenuti sommando a $\frac{2}{3}$ una quantita' strettamente positiva tendente a $\frac{1}{3}$. Inoltre, sostitendo $n = 1$ si ottiene proprio $x = \frac{2}{3}$, quindi, dopo aver verificato che $\frac{2}{3}$ e' un minorante, avremo provato che $\frac{2}{3} = \min B$. Infatti

$$\frac{2}{3} \leq \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} \iff \frac{n^2-1}{3n^2} \geq 0, \quad \text{vero } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Dato che la frazione $\frac{n^2-1}{3n^2}$ tende a $\frac{1}{3}$ ed e' sempre minore di $\frac{1}{3}$, il candidato ad essere estremo superiore di B e' $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. Dimostriamolo usando la caratterizzazione:
1 é un maggiorante:

$$\frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} < 1 \iff \frac{n^2-1}{3n^2} < \frac{1}{3} \iff 3n^2 - 1 < 3n^2, \text{ vero } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overline{x} \in B : \ \overline{x} > 1 - \varepsilon$$

ovvero

$$\overline{x} = \frac{\overline{n}^2-1}{3\overline{n}^2} + \frac{2}{3} \iff \frac{1}{3} - \frac{1}{3\overline{n}^2} > \frac{1}{3} - \varepsilon \iff \overline{n}.\frac{1}{3\varepsilon}.$$

ESERCIZIO 3
Determinare per quali valori del parametro reale x la serie seguente converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\sin 2x - \frac{1}{2}|^n \cdot \frac{1}{n}$$

Avendo a che fare con una serie a termini positivi applichiamo il criterio della radice n-sima e otteniamo che la serie converge per gli x tali che

$$|\sin 2x - \frac{1}{2}| < 1.$$

Risolvendo le due disequazioni troviamo $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ quindi

$$-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi.$$

ESERCIZIO 4
Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}\right)^n \cdot n \sin\left(\frac{3}{2n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}\right)^n = 0$$

poiché é un'esponenziale con base minore di 1. D'altra parte

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{3}{2n}\right) = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{3}{2n}\right)}{\frac{3}{2n}} = \frac{2}{3}.$$

Moltiplicando i risultati si ottiene 0.

ESERCIZIO 5
Dimostrare, con la definizione di limite, che

$$\lim_{n\to\infty} 4n^2 - 3n + 5 = +\infty$$

$$\forall M > 0 \ \exists \ n > \nu(M) : 4n^2 - 3n + 5 > M.$$

Verifichiamolo:

$$4n^2 - 3n + 5 > 4n^2 - 3n > 4n - 3 > M \iff n > \frac{M+3}{4} = \nu(M).$$