AM2: I Appello-6.11.2001

Domanda 1

Siano $f \in C(\mathbf{R}), g \in C^1(\mathbf{R})$. Provare che:
(i) $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$ esiste ed é finito.
(ii) se f e $|g'|$ sono a integrale convergente in $[0, +\infty)$, allora fg é a integrale convergente in $[0, +\infty)$.

Domanda 2

(i) Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, provare che, se $l := \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} > 0$, allora la serie converge per $|x| < \frac{1}{l}$ e non converge se $|x| > \frac{1}{l}$
(ii) Posto $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-\frac{1}{l}, \frac{1}{l})$, provare che f é analitica in $(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l})$.
(iii) Calcolare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{n^n}{n!})^{\cos n\pi} x^n$

Domanda 3

(i) Siano $f_n \in C([a, b]), f_n \to_{n\to+\infty} f$ uniformemente in $[a, b]$. Provare che f é integrabile in $[a, b]$ e che $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$
(ii) Siano $f_n \in C^1([0, \pi]), \quad f_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$. Provare che
$f_n' \to_{n\to+\infty} g$ uniformemente in $[0, \pi] \Rightarrow f_n(x) \to_{n\to+\infty} \int_0^x g(t)dt, \quad \forall x \in [0, \pi]$
e che la convergenza é infatti uniforme.
(iii) Studiare, alla luce di (ii), la convergenza/uniforme convergenza di $f_n(x) = (2n + 1)(\sin x)^{2n} \cos x$ in $[0, \pi]$.

Domanda 4

Provare che l'equazione diferenziale a coefficenti costanti
$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$
ammette n soluzioni $x_1, \ldots, x_n$ linearmente indipendenti, e che ogni altra soluzione é combinazione lineare delle $x_1, \ldots, x_n$.

Domanda 5

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$x^{(8)} - 4x^{(4)} + 4x = e^t$

Domanda 6

(i) Stabilire se $f(x) = \cos x^2$ é integrabile/assolutamente integrabile in $\mathbf{R}$

(ii) Posto $C(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx^2} \cos x^2 dx,\ s \geq 0$, stabilire se C é continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$

(iii) Provare, effettuando un opportuno cambio di variabile, che $\lim_{s \to +\infty} s^{\frac{1}{2}} C(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.