Tutorato IV (14/11/2001)
(Integrazione su varietà di $\mathbb{R}^n$)

Esercizio 1. Osserviamo che la curva Γ ha la seguente parametrizzazione:

$$\Phi(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases} \qquad t \in I = (1, 2).$$

Quindi $\Gamma = \Phi(I)$ con $\Phi \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ e iniettiva, ed inoltre $\dot{\Phi}(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq (0, 0, 0)$, $\forall\, t \in \overline{I}$. Questo dimostra che Γ è un elemento regolare di varietà 1-dimensionale, cioè un elemento di curva regolare.
Calcoliamo il seguente integrale superficiale:

$$\int_\Gamma f d\sigma_1 = \int_1^2 \frac{\log t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\, dt = 3(\log 4 - 1).$$

Esercizio 2. Osserviamo che $\mathcal{S} = \Phi(A)$, dove $A = (a, b) \times (0, \alpha)$ e $\Phi(t, \theta) = (u(t) \cos\theta, u(t) \sin\theta, v(t)) \in \mathcal{C}^1(\overline{A})$ è una funzione iniettiva (queste proprietà si dimostrano facilmente, ricordando che Γ è una curva regolare in $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, e quindi la sua parametrizzazione $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ soddisfa queste proprietà di regolarità e iniettività).
Calcoliamo l'area di tale superficie:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\sigma_2 = \int_A \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right| dt\, d\theta =$$

osserviamo che $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right| = u(t) \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2}$ (notare che per hp $u(t) > 0$), quindi

$$= \alpha \int_a^b u(t) \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2}\, dt.$$

Osserviamo che quest'ultimo integrale si può anche riscrivere come integale curvilineo:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \alpha \int_\Gamma x\, d\sigma_1.$$

Se moltiplichiamo e dividiamo per la lunghezza di Γ, $l(\gamma)$, otteniamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \alpha\, l(\gamma) \frac{1}{l(\gamma)} \int_\Gamma x\, d\sigma_1 = \alpha\, l(\gamma)\, x_b$$

avendo indicato con x_b l'ascissa del baricentro della curva Γ. Quindi riassumendo, possiamo interpretare questo risultato nel seguente modo:
L'area della superficie ottenuta ruotando di un angolo α una certa curva Γ con le proprietà suddette, non è altro che la lunghezza di Γ per la lunghezza dell'arco di circonferenza, percorso dal suo baricentro durante tale rotazione.[1]

Esercizio 3. Si può procedere direttamente, usando la parametrizzazione suggerita, oppure applicando il risultato dimostrato nell'esercizio precedente. In entrambi i casi si giunge allo stesso risultato $\mathcal{A}(\mathbb{T}^2) = 4\pi^2 rR$.

Esercizio 4. Vogliamo verificare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$, cioè:

$$\int_A \mathrm{div} f \, dx\, dy = \int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\sigma_1.$$

Cominciamo col calcolare il primo membro dell'uguaglianza:

$$\int_A \mathrm{div} f \, dx\, dy = \int_A y \, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta d\rho = \frac{2}{3}.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, osserviamo che ∂A è una varietà costituita da due tratti regolari $\partial A_1 = \{(t,0)\ 1 < t < 2\}$ e $\partial A_2 = \{(2 + \cos\theta, \sin\theta)\ 0 < \theta < \pi\}$; quindi:

$$\int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\sigma_1 = \int_{\partial A_1} f \cdot \nu_1 \, d\sigma_1 + \int_{\partial A_2} f \cdot \nu_2 \, d\sigma_1 =$$

dove i versori normali esterni alle due curve regolari sono rispettivamente $\nu_1 = (0, -1)$ e $\nu_2 = (\cos\theta, \sin\theta)$, da cui

$$= \int_1^3 (-t)\, dt + \int_0^\pi (1 + (2+\cos\theta)\sin\theta, 2 + \cos\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{3}$$

che dimostra l'uguaglianza iniziale.

Esercizio 5. Indichiamo con $\Phi^+_{\partial\Omega}(F)$ il flusso esterno del campo vettoriale F attraverso la superficie $\partial\Omega$, dove per definizione di flusso si ha che:

$$\Phi^+_{\partial\Omega}(F) = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma_2$$

[1]Cfr: Tutorato III, esercizio 3 - teorema di Guldino -

dove con ν indichiamo il versore normale esterno alla superficie $\partial\Omega$. Quindi applicando il teorema della divergenza (osserviamo che $\mathrm{div}F = 3$), ed il fatto che Vol(Ω)=1, otteniamo:

$$\Phi^+_{\partial\Omega}(F) = \int_\Omega \mathrm{div}F\, dx = 3\mathrm{Vol}(\Omega) = 3.$$