Prova scritta di AM4 dell' 8/11/01

1) Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$ e si calcoli

$$\int_T x \log(1+y)\; dxdy \ .$$

2) Sia $D \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0\}$ la regione limitata dal piano $\{x_2 = 1\}$ e dal paraboloide $\{x_2 = 4x_1^2 + 9x_3^2\}$ e si calcoli

$$\int_D x_1 x_3^3 dx \ .$$

3) Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme tale che $E_R \equiv E \cap K_R$ (con K_R il cubo chiuso di centro l'origine e lato $2R$) è misurabile secondo Peano-Jordan per ogni $R > 0$ e se $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile secondo Riemann su E_R per ogni $R > 0$ e tale che

$$\sup_R \int_{E_R} |f| dx < \infty \ ,$$

diremo che f è integrabile secondo Riemann (in senso improprio) su E e porremo

$$\int_E f dx = \lim_{R \to \infty} \int_{E_R} f(x) dx \ .$$

(i) Far vedere che tale definizione ben posta (e cioè che il limite esiste).

(ii) Dimostrare che la funzione $f(x,y) = x^{100} y$ è integrabile in senso improprio su $E \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq \exp(-x)\}$.

4) Calcolare il volume del solido in $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la regione

$$\{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 2, \ 0 \leq x_3 \leq 1/x_1\}$$

attorno all'asse delle x_3.

5) (i) Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano–Jordan e $mis(A) > 0$ allora A non è un insieme di misura nulla.

(ii) Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ ha interno non vuoto allora non è di misura nulla.

6) *Se T è una matrice $n \times n$ e K il cubo unitario in $\mathbb{R}^n$ allora* $\operatorname{mis} TK = |\det T|$.

Dare uno schema di dimostrazione di tale affermazione e dimostrarne in dettaglio alcune parti che vi sembrano particolarmente rilevanti.