Tutorato II (17/10/2001)

(Integrali iterati)

Esercizio 1.

i)	$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$1 \le x \le 2,\ \frac{1}{x} \le y \le x\}$
ii)	$\iint_D x^2\, y^2\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$x^2 + y^2 \le 1\}$
iii)	$\iint_D y^3 e^x\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$y \ge 0,\ x \le 1,\ x \ge y^2\}$
iv)	$\iint_D xy\, dx\, dy$	dove	$D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$	$x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$

Esercizio 2. Dimostrare che:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \frac{1}{2} \qquad \text{mentre} \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}\ .$$

Come mai in questo caso non si può invertire l'ordine d'integrazione?

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_{\mathcal{D}} x^2\ dx\, dy\, dz$$

sull'ellissoide $\mathcal{D} \equiv \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$ con $a, b, c > 0$.

Esercizio 4. Trovare il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^3$ con la $\|\,.\,\|_1$ (cioè $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \le 1\}$). Usando il risultato precedente, trovare il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^4$ con la $\|\,.\,\|_1$.

*(Facoltativo) Generalizzare il risultato precedente nel caso di una palla unitaria n-dimensionale.

(Sugg.: Procedere per induzione)

Esercizio 5. Si definisca:

$$\mathcal{D}_n \equiv \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1\};$$

Calcolare:

1. $\mathbb{I}_2 = \int_{\mathcal{D}_2} xy\, dx\, dy$;
2. $\mathbb{I}_3 = \int_{\mathcal{D}_3} xyz\, dx\, dy\, dz$;
3. *(Facoltativo) $\mathbb{I}_n = \int_{\mathcal{D}_n} (x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$.

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_{\mathcal{T}} x^2 (y - x^3) e^{y + x^3}\ dxdy$$

dove:

$$\mathcal{T} \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^3 \le y \le 3, x \ge 1\}.$$

(Sugg.: Considerare il cambio di variabili $u = y - x^3$ e $v = y + x^3$)