Soluzioni della prova scritta di AM4 dell' 8/11/01

1) $\frac{4}{3}\log 2 - \frac{8}{9}$.

2) $\frac{1}{31104}$.

3) (i) Dalla definizione segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un R_0 tale che per ogni $R \geq R_0$

$$\alpha \geq \int_{E_R} |f| dx \geq \alpha - \varepsilon \ ,$$

dove $\alpha \equiv \sup_R \int_{E_R} |f| dx$. Dunque per ogni $R' > R > R_0$ si ha che

$$\int_{E_{R'} \setminus E_R} |f| \leq \varepsilon \ .$$

Sia R_j una qualunque successione che tenda ad infinito; dato $\varepsilon > 0$ sia R_0 come sopra e sia j_0 tale $R_j > R_0$ per ogni $j \geq j_0$. Allora, se $j, i > j_0$ e (ad esempio) $R_j \geq R_i$, si ha che

$$\left| \int_{E_{R_j}} f dx - \int_{E_{R_i}} f dx \right| \leq \int_{E_{R_j} \setminus E_{R_i}} |f| dx \leq \varepsilon \ .$$

Ovvero la successione $\left\{ \int_{E_{R_j}} f dx \right\}$ è di Cauchy e quindi esiste il limite $\lim_{R\to\infty} \int_{E_R} f dx$.

(ii) Se $R > 1$ allora

$$\begin{aligned} \int_{E_R} |f(x,y)| dx dy &= \int_0^R x^{100} \Big(\int_0^{e^{-x}} y dy \Big) dx = \frac{1}{2} \int_0^R x^{100} e^{-2x} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \Big(\sup_{\mathbb{R}} x^{100} e^{-x} \Big) \int_0^R e^{-x} dx \leq \frac{1}{2} \Big(\frac{100}{e} \Big)^{100} (1 - e^{-R}) < \frac{1}{2} \Big(\frac{100}{e} \Big)^{100} \ . \end{aligned}$$

4) 2π.

5) (i) e (ii) seguono dal fatto che un cubo (non degenere), K, non è di misura nulla [infatti se lo fosse, per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe un ricoprimento di K fatto da N cubi K_i la somma delle cui misure non eccederebbe ε; ma questo significherebbe che l'insieme elementare $E \equiv \cup K_i$ avrebbe misura non superiore a ε e così quindi anche $K \subset E$ il che implicherebbe, per l'arbitrarietà di ε che K è degenere]. Ora se A è misurabile e $\text{mis}\, A > 0$ è possibile trovare un insieme elementare $E \subset A$ tale che $\text{mis}\, E > \text{mis}\, A/2$. Dunque esisterebbe un cubo non degenere in E e quindi né E né A possono essere di misura nulla. Quanto a (ii) se A ha interno non vuoto contiene un cubo non degenere nel suo interno e quindi A non può essere di misura nulla.