AM5: I APPELLO-16 Gennaio 2002

1 (Numerabile additività).

Sia μ misura su X, Σ la classe degli insiemi μ- misurabili. Siano

$$E_j \in \Sigma, j \in \mathbf{N}, E_i \cap E_j = \emptyset \ \text{ se } \ i \neq j$$

Provare che

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

2 (Proprietà di regolarità della misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$).

Sia μ la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$. Provare che

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O, O \ \text{ aperto}\}, \ \forall A \subset \mathbf{R}^N$$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \ \text{ compatto}\}, \ \forall E \subset \mathbf{R}^N, \text{misurabile}$$

3 (Diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev).

Formulare la diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev e indicare i passi salienti della dimostrazione.

4 (Diseguaglianza di Sobolev)

Provare che esiste una costante $d = d(N)$ tale che

$$\left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq d \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \ \ \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^N)$$

Esercizio 1

Sia f_n una successione di funzioni misurabili.
Provare che l'insieme

$$\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$$

è misurabile.

Esercizio 2

Sia f sommabile in $\mathbf{R}$.
Provare che la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$ ad una funzione g, periodica di periodo uno, e tale che $g\chi_{[a,b]}$ è sommabile $\forall a \leq b$

Esercizio 3

Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$.
Provare che l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta.
Provare che l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.