AM5: Esercizi e problemi 7.12.01

Esercizio 1

(i) Provare che $L^1(I) = l(I)$ per ogni intervallo $I \subset \mathbf{R}$ ($l(I)$=lunghezza di I.)

(ii) Provare che , se f è continua in $[a, b]$, allora l'integrale di Riemann di f coincide con l'integrale di Lebesgue di f.

(iii) Provare che ogni funzione Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}$ è uguale quasi ovunque ad una funzione boreliana (f boreliana se e solo se $f^{-1}(I)$ è boreliano $\forall I$ intervallo).

(iiii) Siano f, ϕ funzioni da $\mathbf{R}$ in se, rispettivamente misurabile, boreliana. Provare che $\phi(f(x))$ è misurabile.

(v) Provare che $L^{n+m} = L^n \times L^m$

Esercizio 2

Siano f_n misurabili, $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ per ogni n e quasi per ogni x. Provare che

(i) $\int f_n < +\infty$ per qualche n $\Rightarrow \int f_n \to \int \lim f_n$

(ii) l'ipotesi $\int f_n < +\infty$ per qualche n è essenziale.

Esercizio 3

Siano f_n sommabili. Provare che

$$f_n(x) \to f(x) \forall x, \sup_n \int |f_n| < +\infty \Rightarrow \int |f| \leq \sup \int |f_n|$$

Esercizio 4

Provare che se $\sum f_n(x)$ converge quasi per ogni x ed esiste g sommabile tale che $|\sum_1^n f_j(x)| \leq g(x)$ quasi per ogni x, allora $\sum f_n$ è sommabile e $\int \sum f_n = \sum \int f_n$.

Esercizio 5

Sia X spazio di misura finita. Provare che
$\int |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{x : |f(x)| \geq n\}) < +\infty$

Esercizio 6

Provare che $\int_A e^{inx} dx \to 0 \forall A \subset [0, \pi]$ misurabile. Dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0, \pi] : \sin(n_k x)$ converge $\}$ è di misura nulla.

Esercizio 7

Sia f continua sui reali, periodica di periodo 1. Provare che $\int_0^1 f = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N f(n\alpha) \forall \alpha$ irrazionale
(Suggerimento: provarlo dapprima per $f = e^{2\pi k i x}$).

Esercizio 8

(i) Sia $l : C_0(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ forma lineare e positiva (cioè $f \geq 0 \Rightarrow l(f) \geq 0$). Dato un aperto O, e posto $f \leq O$ se $0 \leq f(x) \leq 1 \forall x$ ed $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \subset O$, sia

$$\mu_l(A) = \inf_{A \subset O} \sup_{f \leq O} l(f).$$

Provare che μ_l è una misura.
(Suggerimento: usare il Lemma di Partizione dell'unità..)
(ii) Provare che, se $l(f) = \int f$, integrale nel senso di Riemann, allora μ_l è la misura di Lebesgue.
(Suggerimento: Usare il Lemma di Uryshon per provare che $\mu_l(O) = \sup_{K \subset O} L^n(K)$, ove K significa insieme compatto)