AM5: Esercizi e problemi 21.12.01

Convergenza debole

Se non diversamente specificato, L^p indica $L^p(\mathbf{R}^N), \mathbf{R}^N$ dotato della misura di Lebesgue μ.

Esercizio 1

Sia $f_n \in L^p$, convergente debolmente a $f \in L^p$. Provare che

$$\liminf ||f_n||_p \geq ||f||_p$$

Esercizio 2

Siano $f_n \in L^p$. Provare che
$\sup_n ||f_n||_p < +\infty, f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\Rightarrow f_n$ converge a f debolmente.

Esercizio 3

Siano $f_n \in L^p$. Provare che
(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.
(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.
(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.
(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.
(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.
(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.
(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

Esercizio 4

Illustrare con un esempio che una successione debolmente convergente in L^p può non ammettere alcuna sottosuccessione convergente q.o. (in misura).

Esercizio 5

Stabilire se $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^4}, x \in \mathbf{R}$, converge uniformemente/puntualmente /in misura/ in qualche $L^p(\mathbf{R}), p \geq 1$ /debolmente in qualche $L^p(\mathbf{R}), p > 1$.

Esercizio 6

Sia $f \in L^p$. Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^N : |f|^p \geq t\}) \leq \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p\mu(\{x \in \mathbf{R}^N : |f(x)| \geq t\}) \to 0$ al tendere di t a $0 e a +\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di f ad L^p.

(iii) Sia $f_n \in L^p, p > 1$, tale che $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, e $f_n \to f, q.o.$. Provare che $f_n \to f$ in $L^q_{loc}, \forall q < p$.

Esercizio 7

Sia $f \in L^1, f \geq 0$.

(i) Provare che, per ogni fissato $r > 0$, la funzione $x \to \int_{B_r(x)} f$ è continua e dotata di massimo su $\mathbf{R}^N$,

(ii) provare che, per ogni fissato x in $\mathbf{R}^N$, la funzione $r \to \int_{B_r(x)} f$ è continua .

(iii) Provare che $Q(r) := \max_{x \in \mathbf{R}^N} \int_{B_r(x)} f$ è continua e nondecrescente.

Esercizio 8

(i) Sia μ misura di Borel regolare in $\mathbf{R}^N$, con $\mu(\mathbf{R}^N) < +\infty$. Provare che, se
$\exists 1 < p < q : (\int_{\mathbf{R}^N} |\phi|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} \leq c(\int_{\mathbf{R}^N} |\phi|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \forall \phi$ borel misurabile e limitata
allora μ è combinazione lineare finita di delte di Dirac.

(ii) Siano μ, ν misure di Borel regolari e finite in $\mathbf{R}^N$, $\mu(\mathbf{R}^N) > 0$. Provare che, se
$\exists 1 < p < q : (\int_{\mathbf{R}^N} |\phi|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} \leq c(\int_{\mathbf{R}^N} |\phi|^p d\nu)^{\frac{1}{p}} \forall \phi$ borel misurabile e limitata
allora $\mu = f\nu$ per qualche f boreliana e ν-sommabile, e μ è combinazione lineare di delte di Dirac.

Suggerimenti

1. Usare la diseguaglianza di Holder per $|\int f_n\phi|, \phi \in L^q$ ed il fatto che $||f||_p = \sup_{||\phi||_q \leq 1} |\int f\phi|$..

2. Fissata $\phi \in C_0^\infty$, usare la diseguaglianza
$|\int(f_n - f)\phi| \leq (||f_n||_p + ||f||_p)(\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\leq\delta\}} |\phi|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$

3. Usare le relazioni tra convergenza q.o., in misura, in media..

6. (i)-(ii) Usare la diseguaglianza di Chebichef, usare la formula $\int |f|^p = \int_0^\infty \mu\{x : |f|^p > t\}dt$ insieme alla monotonia di $t \to \mu\{x : |f|^p > t\}$, considerare funzioni che si comportano in $x = 0, \infty$ come $|x \log |x||^{-1}$

(iii) Osservare che, per ogni fissato $R > 0, \int_{\{x:|x|\leq R, |f_n(x)-f(x)|\geq 1\}} |f_n - f|^q \leq (\int_{\{x:|x|\leq R, |f_n(x)-f(x)|\geq 1\}} |f_n - f|^p)^{\frac{q}{p}} \mu(\{x : |x| \leq R, |f_n(x) - f(x)| \geq 1\})^{\frac{p-q}{p}}$, ed usare quindi la convergenza dominata e la relazione tra convergenza q.o. e la convergenza in misura.

7. Osservare che $\int_{B_r(x)} f = (f \star \chi_{B_r(0)})(x)$. Provare quindi, usando (i) e (ii), che $\sup_{r<r_0} Q(r) = Q(r_0)$. Usare infine il fatto che $r_j \to r, x_j \to x \Rightarrow \chi_{B_{r_j}(x_j)} \to \chi_{B_r(x)}$ q.o.

8. (i) Provare che $\mu(\{x\}) = 0 \Rightarrow \mu(B_r(x)) = 0 \forall r > 0$, piccolo.
(ii) Applicare Radon-Nikodim e provare che $\chi_{\{f \geq \frac{1}{k}\}}\nu$ soddisfa la diseguaglianza in (i)