Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2001/2002

CAM - Complementi di Analisi Matematica 1

Seconda prova d'esonero (29-05-02)

CORREZIONE

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{tg} x^2 + \cos x - \mathrm{e}^{\sin x}}{x^4}.$$

Soluzione. Si può utilizzare la formula di Taylor. Poiché il denominatore è x^4 è sufficiente sviluppare il numeratore fino al quarto ordine (incluso). Si ha

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6), \\
\operatorname{tg} x^2 &= x^2 + O(x^6), \\
\mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^5),
\end{aligned}$$

e quindi

$$x + \operatorname{tg} x^2 + \cos x - \mathrm{e}^{\sin x} = x + x^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + O(x^5) = \frac{1}{6}x^4 + O(x^5).$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{tg} x^2 + \cos x - \mathrm{e}^{\sin x}}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to+\infty} x^5 \left[\left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{\frac{x}{x^2+1}} - \sin\left(\frac{2x^2+1}{2x^5} \right) - 1 \right].$$

Soluzione. Si può utilizzare la formula di Taylor. È allora conveniente introdurre la variabile $y = 1/x$, così che si ha

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^5} \left[(1+y^2)^{\frac{y}{1+y^2}} - \sin\left(y^3 + \frac{y^5}{2} \right) - 1 \right].$$

Poiché il denominatore è y^5 è sufficiente sviluppare il numeratore fino al quinto ordine (incluso). Si ha

$$\begin{aligned}
(1+y^2)^{\frac{y}{1+y^2}} &= \exp\left[\frac{y}{1+y^2} \log\left(1+y^2\right) \right] = \exp\left(y^3 - \frac{3}{2}y^5 + O(y^6) \right) = 1 + y^3 - \frac{3}{2}y^5 + O(y^6), \\
\sin\left(y^3 + \frac{y^5}{2} \right) &= y^3 + \frac{y^5}{2} + O(y^6),
\end{aligned}$$

così che risulta

$$(1+y^2)^{\dfrac{y}{1+y^2}} - \sin\left(y^3 + \frac{y^5}{2}\right) - 1 = 1 + y^3 - \frac{3}{2}y^5 - y^3 - \frac{y^5}{2} - 1 + O(y^6) = -2y^5 + O(y^6).$$

Quindi

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{-2y^5 + O(y^6)}{y^5} = -2.$$

<u>Esercizio 3.</u> Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - \sin(\mathrm{e}^x - 1) - 1}{\ln(1+x^4)}.$$

Soluzione. Si può utilizzare la formula di Taylor. Si ha

$$\ln(1+x^4) = x^4 + O(x^8),$$

quindi basta sviluppare il numeratore fino al quarto ordine (incluso). Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^5), \\ \sin(\mathrm{e}^x - 1) &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + O(x^5), \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{e}^{\sin x} - \sin(\mathrm{e}^x - 1) - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - 1 + O(x^5) = \frac{x^4}{12} + O(x^5).$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin x} - \sin(\mathrm{e}^x - 1) - 1}{\ln(1+x^4)} = \frac{1}{12}.$$

<u>Esercizio 4.</u> Dire quante radici reali ha la seguente equazione:

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right) = \frac{\alpha}{(x^2-3)},$$

al variare di α in $\mathbb{R}$.
Soluzione. Studiamo

$$f(x) = \left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right) = \alpha. \tag{$*$}$$

La funzione $f(x)$ è pari (*i.e.* $f(x) = f(-x)$), quindi è sufficiente studiare il grafico per $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right), \\ f'(x) &= 2x\left(3x^4 - 12x^2 + 11x\right), \\ f''(x) &= 30x^4 - 72x^2 + 22. \end{aligned}$$

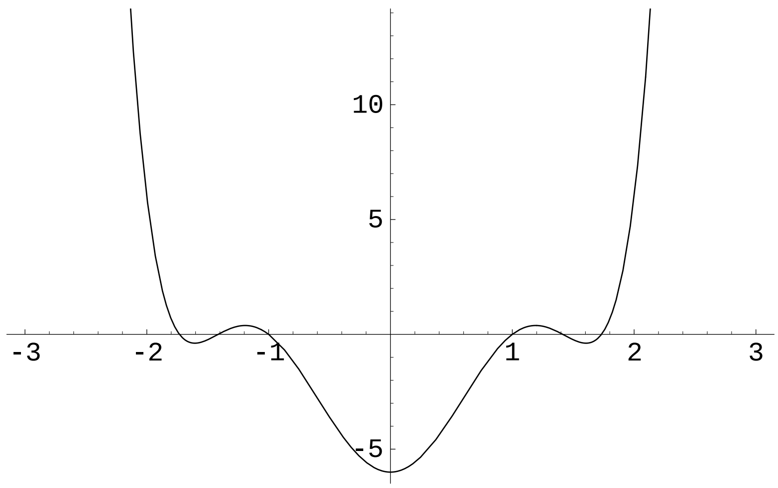

Figura 1. Grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 4.

Quindi si ha $f'(x) = 0$ per $x = 0$ oppure per x tale che

$$x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 33}}{3} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

che dà due valori positivi

$$x = \sqrt{2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}};$$

inoltre

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

quindi $x = x_2 = \sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}$ sarà un punto di minimo, $x = x_1 = \sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}$ sarà un punto di massimo e $x = x_0 = 0$ sarà un punto di minimo. Il grafico completo si ottiene tenendo conto che la funzione è pari e regolare in $x = 0$, ed è dato dalla Figura 1.

Si ha

$$f(0) = -6,$$
$$f(x_1) = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$
$$f(x_2) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Quindi, per $\alpha < f(0) = -6$, l'equazione $(*)$ non ha soluzioni reali. Per $\alpha = -6$ l'equazione $(*)$ ha una sola soluzione ($x = 0$). Per $-6 < \alpha < f(x_2) = -2/3\sqrt{3}$ l'equazione $(*)$ ha due soluzioni. Per $\alpha = -2/3\sqrt{3}$ l'equazione $(*)$ ha quattro soluzioni (delle quali due sono $x = \pm x_2$). Per $-2/3\sqrt{3} < \alpha < f(x_1) = 2/3\sqrt{3}$

l'equazione $(*)$ ha sei soluzioni. Per $\alpha = 2/3\sqrt{3}$ l'equazione $(*)$ ha quattro soluzioni (delle quali due sono $x = \pm x_1$). Infine per $\alpha > 2/3\sqrt{3}$ l'equazione $(*)$ ha solo due soluzioni.

La discussione sopra dà le soluzioni reali dell'equazione dell'eserczio per ogni valore reale, tranne che per $\alpha = 0$. Infatti in tal caso l'equazione diventa

$$\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 2\right) = 0,$$

che ammette solo le quattro soluzioni $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$, mentre l'equazione $(*)$ darebbe anche le due soluzioni $x = \pm 3$ che vanno invece scartate.

<u>Esercizio 5.</u> Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x(2x^3 - 1)}.$$

Soluzione. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, per $x \to \pm\infty$, la funzione tende all'infinito, poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{(2x^4)^{1/3}} = 1.$$

Riscrivendo la funzione $f(x)$ si trova

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x^4 - x\right)^{\frac{1}{3}}, \\ f'(x) &= \frac{1}{3}\left(8x^3 - 1\right)\left(2x^4 - x\right)^{-\frac{2}{3}}, \\ f''(x) &= \frac{2}{9}\left(8x^6 - 20x^3 - 1\right)\left(2x^4 - x\right)^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

Poiché $\left(2x^4 - x\right)^{2/3} \geq 0$ il segno della derivata prima è determinato dalla funzione $\left(8x^3 - 1\right)$. Quindi

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{per } x > \dfrac{1}{2}, \\ = 0, & \text{per } x = \dfrac{1}{2}, \\ < 0, & \text{per } x < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

che implica che la funzione $f(x)$ è decrescente per $x < 1/2$ e crescente per $x > 1/2$; in particolare quindi $x = 1/2$ sarà un punto di minimo.

Notiamo inoltre che la derivata prima è singolare quando si annulla $f(x)$, quindi per $x = 0$ e per $x = x_0 = (1/2)^{1/3}$:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty.$$

Per quanto riguarda lo studio della concavità della funzione si deve studiare la derivata seconda. Si ha $f''(x) = 0$ per x tale che

$$g(x) = 8x^6 - 20x^3 - 1 = 0,$$

i.e. per

$$x = \left(\frac{5 \pm \sqrt{27}}{4}\right)^{\frac{1}{3}};$$

si hanno quindi due punti di flesso $x_1 < 0$ e $x_2 > x_0$.

Inoltre il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno della funzione $g(x)$ e della funzione

$$\left(2x^4 - x\right)^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{(f(x))^5},$$

che ha ovviamente lo stesso segno della funzione $f(x)$. Poiché $g(x) > 0$ per $x < x_1$ e per $x > x_2$ e $f(x) > 0$ per $x < 0$ e per $x > x_0$, si ha

$$f''(x) \begin{cases} > 0, & \text{per } x \in (-\infty, x_1) \cup (0, x_0) \cup (x_2, \infty) \ , \\ < 0, & \text{per } x \in (x_1, 0) \cup (x_0, x_2) \ , \end{cases}$$

e quindi $f(x)$ è convessa per $x < x_2$, per $x \in (0, x_0)$ e per $x > x_2$, ed è concava negli intervalli $(x_1, 0)$ e (x_0, x_2).

Il grafico è quindi come rappresentato in Figura 2.

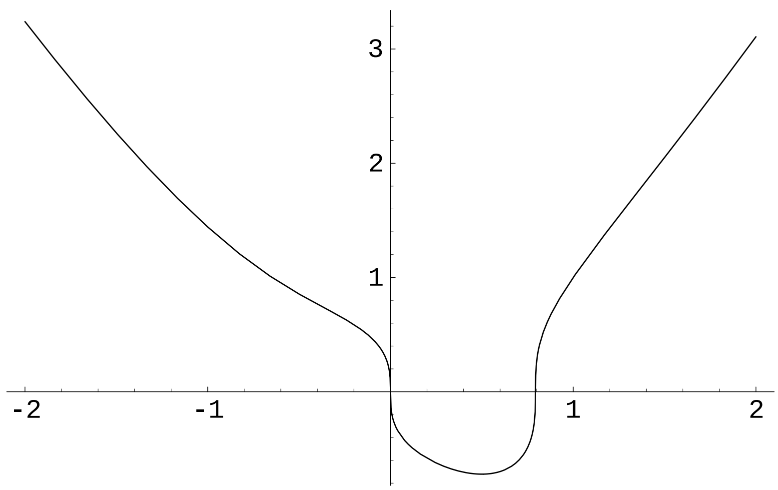

Figura 2. Grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 5.

<u>Esercizio 6.</u> Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right| .$$

Soluzione. Studiamo preliminarmente la funzione

$$g(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

tale che $f(x) = |g(x)|$.

La funzione $g(x)$ è definita per ogni $x \neq \pm 1$ e si ha

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} g(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = \infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0^{\pm}.$$

La funzione $g(x)$ è dispari (*i.e.* $g(-x) = -g(x)$), quindi possiamo studiarla solo per $x \geq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{x^2 - 1}, \\ g'(x) &= -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}, \\ g''(x) &= \frac{2x}{(x^2 - 1)^3} \left(3 + x^2\right). \end{aligned}$$

Quindi $g'(x) < 0$ per ogni x nel dominio di definizione della $g(x)$: la funzione $g(x)$ è perciò strettamente decrescente.

Per determinare la concavità della funzione si deve studiare la derivata seconda. Per $x > 0$ il segno di $g''(x)$ è dato dal segno di $(x^2 - 1)$, quindi

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{per } x > 1, \\ < 0, & \text{per } x < 1, \end{cases}$$

i.e. $f(x)$ è convessa per $x \in (1, \infty)$ e concava per $x \in (0, 1)$.

Si ha in particolare $g'(0) = -1$. Tenendo conto che $g(x)$ è dispari in x si ottiene facilmente il grafico di $g(x)$ anche per $x < 0$. Tenendo conto poi che si ha $f(x) = |g(x)|$, si ottiene il grafico della Figura 3.

Si noti che la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$; si ha infatti

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1.$$

<u>ESERCIZIO 7.</u> Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{1 + x^2}.$$

Soluzione. La funzione $f(x)$ è pari, quindi possiamo considerare $x \geq 0$.

Si ha

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \qquad f(0) = 0.$$

Inoltre si ha per $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + x^2}, \\ f'(x) &= \frac{1 - x^2}{x^4 + 3x^2 + 1}, \\ f''(x) &= \frac{2x\left(x^4 + 4x^2 - 4\right)}{\left(x^4 + 3x^2 + 1\right)^2}, \end{aligned}$$

dove $g(x) = x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (poiché le due radici dell'equazione $g(x) = 0$ sono $x^2 = (-3 \pm \sqrt{5})/2$, e quindi sono negative, e $g(x)$ tende all'infinito per $x \to \pm\infty$). Quindi (per x positivi) si ha

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{per } x < 1, \\ = 0, & \text{per } x = 1, \\ < 0, & \text{per } x > 1, \end{cases}$$

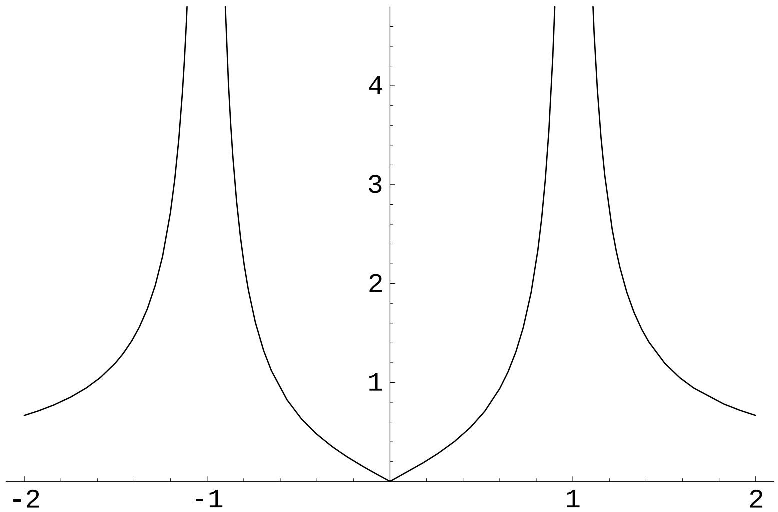

Figura 3. Grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 6.

i.e. $f(x)$ è crescente per $x \in [0, 1)$ e decrescente per $x \in (1, \infty)$. Ne segue in particolare che $x = 1$ è un punto di massimo. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1.$$

Dallo studio della derivata seconda si trova che $f''(x) = 0$ per $x = x_0 \equiv \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$, che costituisce quindi un punto di flesso. Per $x < x_0$ si ha $f''(x) < 0$ e quindi la funzione $f(x)$ è concava, mentre per $x > x_0$ si ha $f''(x) > 0$ e quidni la funzione $f(x)$ è convessa.

In conclusione il grafico della funzione $f(x)$ è come rappresentato in Figura 4.

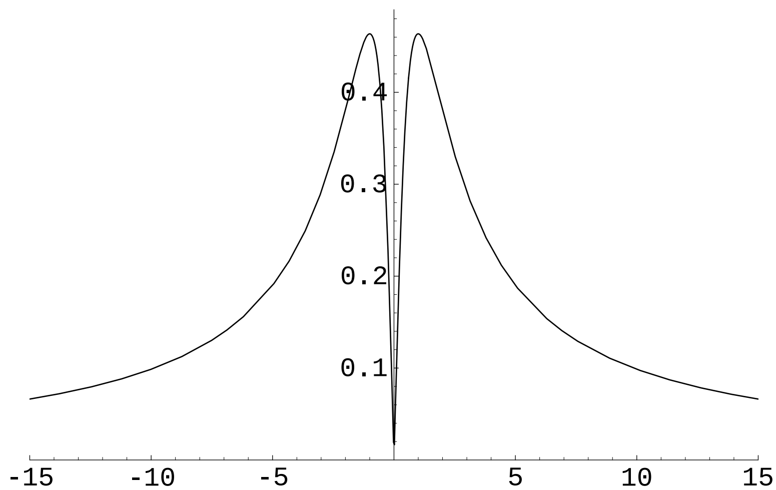

Figura 4. Grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 7.