SOLUZIONI SCRITTO del 19 GIUGNO 2002

Esericizio # 1

Per definizione di probabilità abbiamo che:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

questo fatto fornisce la base per risolvere il problema per induzione. Supponiamo quindi vera l'affermazione sino ad n, ovvero $P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$, e dimostriamone la veridicità al passo, n+1, successivo:

$$\begin{aligned}
& P\left(\cap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \geq \\
& \geq P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - 1 \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 = \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - n
\end{aligned}$$

Esericizio # 2

Indichiamo con X_i la v.a. che assume valore 1 se all' i-esima estrazione si ha una pallina bianca e 0 altrimenti, se le estrazioni avvengono in modo 'onesto' è chiaro che $P(X_i = 1) = \frac{\textit{num. palline bianche}}{\textit{num. tot. di palline}}$. Per calcolare la probabilità che alla seconda estrazione si abbia una pallina bianca è sufficiente ricordare la formula delle 'probabilità totali', cosicché, rammentando anche le definizioni delle quantità b,n e d date nel testo, abbiamo:

$$\begin{aligned}
& P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) = \\
& = \frac{b+d}{b+d+n}\frac{b}{b+n} + \frac{b}{b+n+d}\frac{n}{b+n} = \frac{(b+d)b + bn}{(b+n)(b+d+n)} = \\
& = \frac{b(b+d+n)}{(b+n)(b+d+n)} = \frac{b}{b+n}
\end{aligned}$$

Per il secondo punto, applicando Bayes e sfruttando quanto ottenuto al punto precedente, otteniamo immediatamente:

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0 \mid X_2 = 0) &= \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 0)}{P(X_2 = 0)} = \\
&= \frac{P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0)}{P(X_2 = 0)} = \\
&= \frac{n+d}{b+d+n}
\end{aligned}$$

Esericizio # 3

Definiamo la v.a. $Z \equiv Y_1 + Y_2$ essendo $Y_i \equiv -\log X_i, i = 1, 2$. Poiché X_i è distribuita uniformemente nell' intervallo (0,1), ricordando che una v.a. X ha distribuzione $\Gamma(\alpha, \lambda)$ sse:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x} \chi_{[0,\infty)}(x)$$

ne viene che:

$$P(-\log X_i \leq t) = \int_{e^{-t}}^{1} dx = 1 - e^{-t} \Rightarrow f_{Y_i}(t) = e^{-t} = \Gamma(1,1)$$

Poiché X_1 ed X_2 sono v.a. indipendenti tali sono anche Y_1 ed Y_2 inoltre la densità della somma di due v.a. indipendenti si calcola come prodotto di convoluzione tra le rispettive funzioni di densità cosicché ,nel caso in cui tali v.a. siano positive, abbiamo:

$$f_{X+Y}(t) = \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x) dx$$

Poniamo che $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, allora:

$$f_{X+Y} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \lambda^{\alpha+\beta} x^{\alpha-1} (t-x)^{\beta-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)}$$

ricordando che:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

otteniamo che $X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$, ciò implica,nel nostro caso, che $Z \sim \Gamma(2,1)$, conseguentemente $f_{X_1 X_2}(t) = \frac{f_Z(z(t)}{|g'(z(t)|}$ con $g(z) = e^{-z}$.

Esericizio # 4

Sia Y_i la v.a. che vale 1 qualora $X_i \in (0, \frac{\lambda}{n})$ ed è nulla altrimenti. Per le ipotesi del testo abbiamo che $P(Y_i = 1) = P(X_i \leq \frac{\lambda}{n}) = \frac{\lambda}{n}$.

Sia ora $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ allora $Z_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ e quindi:

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Per rispondere al primo punto è sufficiente osservare che, per n molto grande, $\ln(1 - \frac{\lambda}{n}) \simeq -\frac{\lambda}{n}$, cosí da ottenere come distribuzione limite quella di Poisson di parametro λ, ovvero:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$