Tutorato di CP1 del 20 Marzo 2002

Dr. Luca Di Persio

Esercizio 1

Qual' è il numero aspettato di tifosi della squadra A in un gruppo di 3 persone scelte, a caso, da un insieme di 7 tifosi di cui 4 della squadra A e 3 della squadra B ?

Esercizio 2

Supponiamo che la variabile aleatoria discreta X prenda valori nell' insieme {-1,0,1 } con probablità:

$$P(X=-1)=p,\ P(X=0)=q,\ P(X=1)=r,\ P(X=k)=0 \forall k \notin \{-1,0,1\}$$

con p+q+r=1. Definita $Y=X^n$, quanto vale la media di Y ?

Esercizio 3

Se X è una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro r quanto vale la media della v.a. $Y \equiv X^n$?

Esercizio 4

Suppooniamo di lanciare 6 volte un dado onesto (a 6 facce), ci domandiamo quale sia la probablità di avere esattamente un 1, due volte un 2 ed una sola volta un 6.

Esercizio 5

Sia X una v.a. ed Y una seconda v.a. di Bernoulli di parametro p=0.5. Supponiamo che X ed Y siano indipendenti e definiamo la v.a. Z nel seguente modo: $Z=X$ se $Y=0$ e $Z=-X$ se $Y=1$. Quanto vale $\mathbf{E}[Z]$?

Soluzione Esercizio 1

Definiamo: $X = \{\text{numero tifosi della squadra A}\}$, quindi $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, allora:

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} \qquad P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}$$
$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} \qquad P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}}$$

Ne viene che:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{3} iP(X=i) = 1.71$$

Soluzione Esercizio 2

Dividiamo la zoluzione del problema nei due casi n pari ed n dispari.

$$\text{per n pari : } X^n = \begin{cases} 1 & , X=-1 \\ 0 & , X=0 \\ 1 & , X=1 \end{cases} \quad \text{per n dispari: } X^n = \begin{cases} -1 & , X=-1 \\ 0 & , X=0 \\ 1 & , X=1 \end{cases}$$

Nel primo caso, n pari, abbiamo che:

$$P(X^n = 0) = q \qquad P(X^n = 1) = P(\{X^n = -1\} \cup \{X = 1\}) = p + r$$

e quindi: $\mathbb{E}[X^n] = p + r$. Per n dispari, in modo analogo, otteniamo: $\mathbb{E}[X^n] = r - p$

Soluzione Esercizio 3

La soluzioone si ricava facilmente dal problema precedente, basta porre p=0 cosı' da avere: $P(X = 0) = q$ e $P(X = 1) = r$ ed ovviamentte ancora $q + r = 1$. Natutralmente in questo caso il fatto che n sia pari o dispari non ha importanza e si otttiene facilmente $\mathbb{E}[X^n] = r$.

Soluzione Esercizio 4

Si può facilmente risolvere il problema pensando alla distribuzione multinomiale cosí da ottenere:

$$P(\{1,2,0,0,0,1\}) = \frac{4!}{1!2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{72}$$

Soluzione Esercizio 5

La variabile aleatoria Z ha una distribuzione simmetrica, infatti:

$P(Z = k) = P(\{X = k, Y = 0\}\{X = -k, y = 1\} = P(X = k, y = 0) + P(X = -k, y = 1) =$
$= P(X = k)(1 - p) + P(X = -k)(p)$

Nello stesso modo otteniamo:

$$P(Z = -k) = P(X = -k)(1 - p) + P(X = k)(p) = P(X = k)$$

cosicché: $\mathbb{E}[z] = 0$.