Esercizi di CP2, II
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Sia X una v.a. reale su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $\mathcal{L}_X$ la sua legge:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto \mathcal{L}_X(A) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A).$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{L}_X)$ è uno spazio di probabilità.

Esercizio 2 *(Massa di Dirac)*

a) Sia (S, Σ) uno spazio misurabile. Fissato $s \in S$, sia

$$\Sigma \ni A \longmapsto \delta_{\{s\}}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in A \\ 0 & \text{se } s \notin A. \end{cases}$$

Verificare che $\delta_{\{s\}}$ è una misura su (S, Σ), detta *misura (o massa) di Dirac concentrata in* s.

b) Siano $s_1, s_2, \ldots$ una quantità finita o numerabile di punti distinti di S e siano $p_1, p_2, \ldots$ altrettanti numeri non negativi. Sia

$$\Sigma \ni A \longmapsto \mu(A) = \sum_k p_k \, \delta_{\{s_k\}}(A). \qquad (*)$$

Mostrare che μ è una misura su (S, Σ). Sotto quali condizioni μ è una misura di probabilità?

c) Una misura ν su $(E, \mathcal{E})$ si dice discreta se esiste una quantità finita o numerabile di punti $e_1, e_2, \ldots$ di E e di numeri non negativi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ tale che per ogni $A \in \mathcal{E}$

$$\nu(A) = \sum_{i \,:\, e_i \in A} \gamma_i$$

(si ponga, qui e nel seguito, $\sum_{i \,:\, e_i \in A} \alpha_i = 0$ se $\{i \,:\, e_i \in A\} = \emptyset$)[1]. Mostrare che una misura è discreta se e solo se è una combinazione lineare di masse di Dirac come in $(*)$.

Esercizio 3 Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia X una v.a. *discreta*, cioè X è una v.a. reale tale che l'insieme $E = X(\Omega)$ è finito o numerabile. Indichiamo con $x_1, x_2, \ldots$ i valori che può assumere ($E = \{x_1, x_2, \ldots\}$) e con $p_1, p_2, \ldots$ la *distribuzione* di X:

$$p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \qquad \text{per ogni } k.$$

a) Verificare che dev'essere $p_k \geq 0$ e $\sum_k p_k = 1$.

b) Mostrare che

$$\mathcal{L}_X(A) = \sum_{k \,:\, x_k \in A} p_k = \sum_i p_i \, \delta_{\{x_i\}}(A), \qquad A \in \mathcal{B}$$

e dedurre che la legge di una v.a. discreta è una misura (di probabilità) discreta su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

c) Detta F_X la funzione di distribuzione di X, mostrare che

$$F_X(x) = \sum_{k \,:\, x_k \leq x} p_k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dedurre che per v.a. discrete F_X è costante a tratti e salta nei punti x_k con salto pari a p_k.

[1] Dimostrare, se non già fatto (!!!), che ν è in effetti una misura.