Esercizi di CP2, VII
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Sia $X = (X_1, X_2)$ una v.a. con densità uniforme nel disco $D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \rho\}$ (qui $|\cdot|$ =norma euclidea), ovvero

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\rho^2} 1\!\!1_{D_\rho}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(|X| \le t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

b) Sia R la distanza (aleatoria) di X dall'origine. Calcolare, se esiste, la densità di R.

c) Siano $R_1, \ldots, R_n$ v.a. i.i.d., con la stessa legge di R (ad esempio, le distanze dall'origine di n punti presi a caso e in modo indipendente in D_ρ). Dimostrare che la successione

$$Y_n = \min(R_1, \ldots, R_n)(= \text{distanza minima dall'origine})$$

converge a 0 q.c. Cosa si può dire per $Z_n = \max(R_1, \ldots, R_n)(=$ distanza massima dall'origine)?

Esercizio 2

È noto che $X \sim \text{Exp}(1)$. Non è però possibile osservare direttamente X: ciò che si può osservare è $Y = X + W$, dove W è un errore indipendente da X e con legge Exp(10), quindi

$$f_{X,W}(x,w) = 10\, e^{-x-10w}\, 1\!\!1_{x>0,w>0}.$$

a) Calcolare la densità congiunta di (X, Y) e la densità marginale di Y.

b) X e Y sono indipendenti?

c) Dire se la coppia di v.a. $(\ln(Y - X), e^{-W})$ ha densità di probabilità.

Esercizio 3 Sia (X, Y) un vettore gaussiano standard su $\mathbb{R}^2$, cioè con densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(X > Y)$ e $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \le z)$, per $z \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare la densità congiunta e le densità marginali di X e X/Y. Si tratta di v.a. indipendenti?

Esercizio 4 Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. a valori in $\mathbb{R}$.

a) Se f è una funzione continua, dimostrare che:

a1) se $X_n \to X$ q.c. allora $f(X_n) \to f(X)$ q.c.

a2) se $X_n \to X$ in probabilità allora $f(X_n) \to f(X)$ in probabilità.

b) Sia g una funzione continua, limitata, invertibile e con inversa continua (es. $g(x) = \arctan x$).

b1) Dimostrare che $X_n \to X$ in probabilità se e solo se $g(X_n) \to g(X)$ in L^1.

b2) Prese due v.a. Y e Z, si definisca $d(Y, Z) = ||g(Y) - g(Z)||_{L^1}$. Mostrare che $d(Y, Z) = 0$ se e solo se $Y = Z$ q.c. Identificando le v.a. che sono uguali q.c., mostrare che d è una metrica sullo spazio che ne consegue $\mathcal{X}$. Dimostrare che lo spazio metrico $(\mathcal{X}, d)$ è completo.

c) Da **b)**, dedurre che la convergenza in probabilità è compatibile con una metrica. Dimostrare che la successione $\{X_n\}_n$ definita in **c)** dell'esercizio 1 nell'esercitazione VI non converge (non solo a 0) in probabilità (quindi non converge né q.c. né in L^p)[1].

d) (Più difficile[2]) Provare che la convergenza q.c. non è compatibile con una metrica, cioè: non è possibile trovare una distanza d_0 su $\mathcal{X}$ tale che $X_n \to X$ q.c. se e solo se $d_0(X_n, X) \to 0$.

---

[1] Ricordiamo che $X_n = nY_n$, con $Y_1, Y_2, \ldots$ indipendenti e $Y_k \sim \text{Exp}(k)$. In particolare, la densità congiunta di Y_k e Y_n è: $f_{Y_k,Y_n}(y_1, y_2) = kn\, e^{-ky_1-ny_2}\, 1\!\!1_{y_1>0,y_2>0}$.

[2] Potrebbe essere utile ricordare che esistono successioni che convergono in probabilità ma non q.c. e il seguente risultato: *Sia (E, ρ) uno spazio metrico, $\{x_n\}_n \subset E$, $x \in E$. Se da ogni sottosucessione di $\{x_n\}_n$ è possibile estrarre una (sotto-)-sottosuccessione che converge a x, allora x_n converge a x.*

Soluzioni

Esercizio 1 a) Ovviamente, $\mathbb{P}(|X| \le t) = 0$ se $t < 0$. Se $t \ge 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \le t) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le t\}} f_X(x)\, dx_1 dx_2 = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{D_t} 1\!\!1_{D_\rho}(x)\, dx_1 dx_2$$
$$= \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{D_t \cap D_\rho} dx_1 dx_2 = \frac{\mathrm{Leb}_2(D_t \cap D_\rho)}{\pi\rho^2}.$$

Ma $D_t \cap D_\rho = D_t$ se $t \le \rho$ e $D_t \cap D_\rho = D_\rho$ se $t > \rho$, quindi

$$\mathbb{P}(|X| \le t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^2/\rho^2 & \text{se } 0 \le t < \rho \\ 1 & \text{se } t \ge \rho. \end{cases}$$

b) In **a)**, è stata calcolata la f.d. di R: $R = |X|$, quindi $F_R(r) = \mathbb{P}(|X| \le r)$. Derivando, $F_R'(r) = 2r/\rho^2\, 1\!\!1_{0<r<\rho}$ che integra a 1, quindi la densità di R esiste e vale $f_R(r) = 2r/\rho^2\, 1\!\!1_{0<r<\rho}$.

c) Per $\delta > 0$, si ha

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \delta) = \mathbb{P}(\min(R_1, \dots, R_n) > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta, \dots, R_n > \delta) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(R_k > \delta)$$
$$= \Big(1 - F_R(\delta)\Big)^n = \Big(1 - \frac{\delta^2}{\rho^2}\Big)^n$$

dove l'ultima uguaglianza è vera se $\delta < \rho$, e $\mathbb{P}(|Y_n| > \delta) = 0$ se $\delta \ge \rho$. Allora, per ogni $\delta > 0$,

$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \delta) \le \sum_n \Big(1 - \frac{\delta^2}{\rho^2}\Big)^n < \infty,$$

quindi $Y_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Per quanto riguarda la distanza massima, viene da pensare che converga a ρ, il che è vero. Ad esempio, si può verificare come segue.

Indichiamo con $\tilde{R}_i = \rho - R_i$. Ovviamente le v.a. $\tilde{R}_i$ rimangono indipendenti. Inoltre,

$$F_{\tilde{R}_i}(t) = \mathbb{P}(\tilde{R}_i \le t) = \mathbb{P}(R_i \ge \rho - t) = 1 - F_{R_i}(\rho - t).$$

Allora, procedendo analogamente a sopra, si verifica immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty} \min(\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n) = 0 \quad \text{q.c..}$$

Infine, da $R_i = \rho - \tilde{R}_i$, si ottiene

$$Z_n = \max(R_1, \dots, R_n) = \max(\rho - \tilde{R}_1, \dots, \rho - \tilde{R}_n) = \rho - \min(\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n)$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \rho - \lim_{n\to\infty} \min(\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n) = \rho \quad \text{q.c.}$$

Esercizio 2 a) Si ha $(X, Y) = \varphi(X, W)$, dove $\varphi(x, w) = (x, x + w)$. Per $(x, w) \in \mathbb{R}^2$, φ è C^1, invertibile con inversa $\psi(x, y) = (x, y - x)$ di classe C^1. Allora,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X,W} \circ \psi(x, y) \cdot |\det J_\psi(x, y)| = 10e^{-x-10(y-x)} 1\!\!1_{x>0, y-x>0} \cdot 1 = 10e^{9x-10y} 1\!\!1_{y>x>0}.$$

Quindi,

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 10e^{9x-10y}dx\, 1\!\!1_{y>0} = \frac{10}{9}(e^{-y} - e^{-10y})1\!\!1_{y>0}.$$

b) X e Y non sono indipendenti, come si evince dal fatto che la densità congiunta è nulla quando $y \leq x$. Infatti, si consideri ad esempio $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1)$. Ovviamente tale probabilità vale 0, perché $\{(x,y) : x > 1, y < 1\} \subset \{(x,y) : x \geq y\}$, quindi

$$\mathbb{P}(X > 1, Y < 1) = \int_{\{(x,y)\,:\,x>1,y<1\}} f_{X,Y}(x,y)dxdy \leq \int_{\{(x,y)\,:\,x\geq y\}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 0$$

perché $f_{X,Y}(x,y) = 0$ se $x \geq y$. Inoltre, $\mathbb{P}(X > 1) = e^{-1}$ (si ricordi che $X \sim \text{Exp}(1)$) e

$$\mathbb{P}(Y < 1) = \int_0^1 f_Y(y)dy > 0.$$

Quindi, $\mathbb{P}(X > 1, Y < 1) \neq \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(Y < 1)$, e ciò prova che X e Y non sono indipendenti.

Oppure, basta osservare che $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(X, X+W) = \text{Var}(X) + \text{Cov}(X,W) = \text{Var}(X) = 1 \neq 0$ (si ricordi che X e W sono indipendenti), quindi X e Y non sono indipendenti.

c) Si noti che $\ln(Y - X) = \ln W$: la v.a. $\ln(Y - X)$ è in effetti ben posta perché $Y - X = W > 0$ q.c. La coppia $(\ln(Y - X), e^{-W})$ non può avere densità perché ciascuna componente è funzione dell'altra. Formalmente, si prenda ad esempio

$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \,:\, \xi_2 = e^{-e^{\xi_1}},\, \xi_1 > 0\}.$$

Allora, A (è il grafico di una funzione continua e quindi) è un insieme di misura di Lebesgue (su $\mathbb{R}^2$) nulla ma

$$P\Big((\ln(Y - X), e^{-W}) \in A\Big) = 1.$$

Esercizio 3 a) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > Y) &= \int_{\{(x,y)\,:\,x>y\}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi}\, e^{-(x^2+y^2)/2}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy.\end{aligned}$$

Purtroppo non si riesce a calcolare esplicitamente $\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy$. Però, osserviamo che, per evidenti ragioni di simmetria,

$$\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y)$$

quindi, poiché[3] $\mathbb{P}(X = Y) = 0$, dev'essere necessariamente $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y) = 1/2$. Poi, ovviamente $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq z) = 0$ per $z \leq 0$. Se invece $z > 0$, eseguendo la sostituzione $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, con $\rho > 0$ e $\theta \in (0, 2\pi)$, si ha

$$\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq z) = \int_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\leq z\}} \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} d\rho \int_0^{2\pi} re^{-r^2/2}d\theta = 1 - e^{-z/2}.$$

b) $(U,V) = (X, X/Y) = \varphi(X,Y)$, dove $\varphi(x,y) = (x, x/y)$, per $(x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$. Quindi, $\varphi^{-1}(u,v) \equiv \psi(u,v) = (u, u/v)$, per $(u,v) \in \varphi(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{v = 0\}$. Poiché $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \mathbb{P}(Y \neq 0) = 1$, si ha

$$f_{X,X/Y}(u,v) = f_{X,Y}(u, u/v) \cdot |\det J_\psi(u,v)|\, 1\!\!1_{v\neq 0} = \frac{1}{2\pi}\frac{|u|}{v^2}\, e^{-\frac{u^2}{2}(1+v^2)/v^2}$$

[3]Infatti, $\text{Leb}_2(\{(x,y) \,:\, x = y\}) = 0$, quindi $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{(x,y) \,:\, x = y\}) = 0$ perché (X,Y) ha densità.

(l'ultima uguaglianza è da intendere q.o.). La densità marginale di X è ovviamente una densità $\mathrm{N}(0,1)$. Calcoliamo la densità marginale di X/Y:

$$
\begin{aligned}
f_{X/Y}(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,X/Y}(u,v)du = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u|}{v^2}\, e^{-\frac{u^2}{2}(1+v^2)/v^2} du \\
&= \frac{2}{2\pi v^2}\int_0^{+\infty} u\, e^{-\frac{u^2}{2}(1+v^2)/v^2} du = \frac{1}{\pi(1+v^2)}
\end{aligned}
$$

che è una densità nota, detta "di Cauchy".

Infine, le v.a. X e X/Y non sono indipendenti, come si evince dal fatto che la densità congiunta non è il prodotto delle densità marginali.

Esercizio 4 a1) Sia $A = \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$. Se $\omega \in A$ allora $\lim_{n\to\infty} f(X_n(\omega)) = f(X(\omega))$ perché f è continua, quindi

$$
A \subset \{\omega : \lim_{n\to\infty} f(X_n(\omega)) = f(X(\omega))\}.
$$

Ora, se $X_n \to X$ q.c. allora $\mathbb{P}(A) = 1$, quindi $\mathbb{P}(\{\omega : \lim_{n\to\infty} f(X_n(\omega)) = f(X(\omega))\}) = 1$, cioè $f(X_n) \to f(X)$ q.c.

a2) Supponiamo per assurdo che $f(X_n) \not\to f(X)$ in probabilità, cioè esiste $\delta^* > 0$ tale che

$$
\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \delta^*) = \alpha > 0.
$$

Poiché per ipotesi $X_n \to X$ in probabilità, esiste una sottosuccessione $\{X_{n_k}\}_k$ di $\{X_n\}_n$ tale che $X_{n_k} \to X$ per $k \to \infty$ q.c. Da **a1)**, sappiamo che $f(X_{n_k}) \to f(X)$ q.c. per $k \to \infty$, quindi $f(X_{n_k}) \to f(X)$ in probabilità per $k \to \infty$, dunque

$$
0 = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_{n_k}) - f(X)| > \delta^*) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| > \delta^*) = \alpha > 0
$$

cioè $0 \geq \alpha > 0$, il che è evidentemente un assurdo.

Oppure, si può dimostrare usando il fatto che una funzione continua su un compatto è uniformemente continua: per ogni $R > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(R,\varepsilon) > 0$ tale che

$$
\text{per ogni } x, y \text{ tali che } |x| \leq R, |y-x| \leq R, \text{ se } |y-x| < \delta \text{ allora } |f(y) - f(x)| < \varepsilon.
$$

Quindi, per ogni $R > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(R,\varepsilon) > 0$ tale che

$$
\{|y-x| < \delta, |x| \leq R, |y-x| \leq R\} \subset \{|f(y) - f(x)| < \varepsilon\}
$$

e quindi (passando al complementare)

$$
\{|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{|y-x| \geq \delta\} \cup \{|x| > R\} \cup \{|y-x| > R\}.
$$

Allora,

$$
\mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta) + \mathbb{P}(|X| > R) + \mathbb{P}(|X_n - X| > R).
$$

Passando al limite per $n \to \infty$, ricordando che $X_n \to X$ in probabilità, si ottiene

$$
\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X| > R).
$$

Ora, R è arbitrario e $\mathbb{P}(|X| > R) \to 0$ per $R \to +\infty$, da cui segue che

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) = 0.
$$

Poiché ε è un qualsiasi numero positivo, possiamo concludere che $f(X_n) \to f(X)$ in probabilità.

b1) Mostriamo che se $X_n \to X$ in probabilità allora $\mathbb{E}(|g(X_n)-g(X)|) \to 0$. Preso $\delta > 0$, e ricordando che g è limitata, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|g(X_n) - g(X)|) &= \mathbb{E}(|g(X_n) - g(X)|\, 1\!\!1_{|g(X_n)-g(X)|\le\delta}) + \mathbb{E}(|g(X_n) - g(X)|\, 1\!\!1_{|g(X_n)-g(X)|>\delta}) \\ &\le \delta + 2M_g\, \mathbb{P}(|g(X_n) - g(X)| > \delta)\end{aligned}$$

dove M_g denota una costante tale che $|g| \le M_g$. Allora,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(|g(X_n) - g(X)|) \le \lim_{n\to\infty} \Big(\delta + 2M_g\, \mathbb{P}(|g(X_n) - g(X)| > \delta)\Big) = \delta$$

perché, da **a2)**, $g(X_n) \to g(X)$ in probabilità (g è continua). Poiché δ è arbitrario, possiamo concludere che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|g(X_n) - g(X)|) = 0$, da cui segue che $g(X_n) \to g(X)$ in L^1.

Viceversa, supponiamo che $g(X_n) \to g(X)$ in L^1. In tal caso sappiamo che $Y_n := g(X_n) \to g(X) =: Y$ in probabilità. Se ψ denota l'inversa di g, per ipotesi ψ è continua, dunque, usando **a2)**, si ha che $X_n = \psi(Y_n) \to \psi(Y) = X$ in probabilità, da cui la tesi.

b2) Osserviamo anzitutto che, poiché g è limitata, esiste $\mathbb{E}(g(Y))$ per ogni v.a. Y, quindi $d(Y, Z) = \mathbb{E}(|g(Y)-g(Z)|)$ è ben posta. Inoltre, $d(Y, Z) = 0$ se e solo se $||g(Y)-g(Z)||_{L^1} = 0$, il che è vero se e solo se $g(Y) = g(Z)$ q.c. Ora, poiché g è una funzione invertibile, in particolare è iniettiva, tale uguaglianza è vera se e solo se $Y = Z$ q.c.

Perché d sia una metrica su $\mathcal{X}$, occorre che $d(Y, Z) = 0$ se e solo se $Y = Z$, che $d(Y, Z) = d(Z, Y)$ e che $d(Y, Z) \le d(Y, U) + d(U, Z)$ per ogni $Y, U, Z \in \mathcal{X}$. Ora, le prime due sono banalmente vere, ma anche la terza perché

$$d(Y, Z) = ||g(Y) - g(Z)||_{L^1} \le ||g(Y) - g(U)||_{L^1} + ||g(U) - g(Z)||_{L^1} = d(Y, U) + d(U, Z).$$

Infine, il fatto che lo spazio $(\mathcal{X}, d)$ è completo segue dalla completezza di $L^1 \equiv L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Infatti, sia $\{X_n\}_n$ una successione di Cauchy in $(\mathcal{X}, d)$, cioè per ogni ε esiste n_0 tale che per ogni $n, m > n_0$ si ha $d(X_n, X_m) < \varepsilon$. Poiché g è limitata, $g(X_n) \in L^1$ per ogni n ed inoltre (dalla definizione di d) per ogni ε esiste n_0 tale che per ogni $n, m > n_0$ si ha $||g(X_n) - g(X_m)||_{L^1} < \varepsilon$, cioè la successione $\{g(X_n)\}_n$ è di Cauchy in L^1. Ma L^1 è completo, quindi esiste $Y \in L^1$ tale che $g(X_n) \to Y$ in L^1. Posto $X = \psi(Y)$, con ψ l'inversa di g, ovviamente $X \in \mathcal{X}$, $Y = g(X)$ e

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|g(X_n) - g(X)|) = \lim_{n\to\infty} d(X_n, X),$$

da cui segue la completezza di $(\mathcal{X}, d)$.

c) Da **b)** segue che

$$X_n \to X \text{ in probabilità} \quad \text{se e solo se} \quad g(X_n) \to g(X) \text{ in } L^1 \quad \text{se e solo se} \quad d(X_n, X) \to 0,$$

il che significa che la convergenza in probabilità equivale alla convergenza rispetto ad una opportuna metrica (ovvero, "la convergenza in probabilità è compatibile con una metrica"), che peraltro rende completo lo spazio. Questo fatto è piuttosto importante e, in particolare, consente di dimostrare che la successione $\{X_n\}_n$ definita in **c)** dell'esercizio 1 nell'esercitazione VI non converge (non solo a 0) in probabilità, quindi non converge né q.c. né in L^p.

Nell'esercizio in questione, la successione $\{X_n\}_n$ è definita da: $X_n = nY_n$, con $Y_1, Y_2, \dots$ indipendenti e $Y_k \sim \text{Exp}(k)$. In particolare, la densità congiunta di Y_n e Y_m è: $f_{Y_n,Y_m}(y_1, y_2) = nm\, e^{-ny_1-my_2}\, 1\!\!1_{y_1>0,y_2>0}$. Ora, per dimostrare che non converge, basta far vedere che non è di Cauchy rispetto a d: esiste un ε^* tale che per ogni n_0 esistono due indici $n, m > n_0$ tali che $d(X_n, X_m) \ge \varepsilon^*$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}d(X_n, X_m) = d(nY_n, mY_m) = \mathbb{E}(|g(nY_n) - g(mY_m)|) &= \int_{\mathbb{R}^2} |g(ny_1) - g(my_2)|\, f_{Y_n,Y_m}(y_1, y_2) dy_1\, dy_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2_+} |g(ny_1) - g(my_2)|\, nm\, e^{-ny_1-my_2} dy_1\, dy_1.\end{aligned}$$

Consideriamo il cambio di variabile $(x_1, x_2) = (ny_1, my_2)$: il TCV dà

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |g(ny_1) - g(my_2)|\, nm\, e^{-ny_1 - my_2} dy_1\, dy_1 = \int_{\mathbb{R}^2_+} |g(x_1) - g(x_2)|\, nm\, e^{-x_1 - x_2} \cdot \frac{1}{nm}\, dx_1\, dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2_+} |g(x_1) - g(x_2)|\, e^{-x_1 - x_2}\, dx_1\, dx_1 = C_g$$

dove $C_g (> 0)$ è semplicemente il risultato di quell'integrale che, si noti, non dipende né da n né da m. Ma allora per ogni n e m, $d(X_n, X_m) = C_g$, quindi la successione $\{X_n\}_n$ non è di Cauchy rispetto a d e dunque $\{X_n\}_n$ non può convergere in probabilità.

d) Supponiamo per assurdo che esista una metrica d_0 tale che la convergenza q.c. sia compatibile con d_0, cioè per ogni successione $\{X_n\}_n$,

$$X_n \to X \text{ q.c.} \quad \text{se e solo se} \quad d_0(X_n, X) \to 0.$$

Quindi, supponiamo (per assurdo) che esiste uno spazio metrico $(\mathcal{X}, d_0)$ dove $d_0(X_n, X) \to 0$ per $n \to \infty$ significa che $X_n \to X$ q.c. Vale allora il risultato suggerito nella nota: *se da ogni sottosucessione di $\{X_n\}_n$ è possibile estrarre una (sotto-)sottosuccessione che converge a X, allora X_n converge a X.*

Consideriamo una successione $\{Y_n\}_n$ tale che

$$Y_n \to Y \text{ in probabilità} \quad \text{ma} \quad Y_n \not\to Y \text{ q.c.}$$

(ricordiamo che almeno una successione con queste caratteristiche esiste...). Ora, prendiamo una qualsiasi sottosuccessione $\{Y_{n_k}\}_k$ di $\{Y_n\}_n$. Ovviamente $Y_{n_k} \to Y$ in probabilità per $k \to \infty$, quindi da essa possiamo estrarre una (sotto-)sottosuccessione che converge a Y q.c. Ma allora, usando il risultato sopra riportato, si avrebbe che $Y_n \to Y$ q.c., il che è assurdo. Dunque questa metrica d_0 in realtà non esiste.