

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 28-01-99

Due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , sono vincolati a muoversi su una guida circolare di raggio $r = 1$ posta in un piano verticale π . Si scelga in π un sistema di coordinate (x, y) nel quale la circonferenza abbia equazione

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Due punti materiali P_3 e P_4 , anch'essi di massa m , possono scorrere lungo una guida orizzontale contenuta nel piano π , di equazione $y = 0$.

I punti P_1 e P_2 sono collegati tramite una molla, rispettivamente, ai punti P_3 e P_4 , i quali, a loro volta, sono collegati tramite una molla allo stesso punto materiale P_5 , di massa m , libero di scorrere lungo l'asse y ; le molle hanno tutte lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$.

(1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane non banali dei punti P_3 , P_4 e P_5 e gli angoli che i raggi vettori OP_1 e OP_2 formano con la verticale discendente (se O è il centro della guida circolare).

(2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(3) Per valori dei parametri $m = g = k = 1$, studiare le piccole oscillazioni del sistema intorno a una posizione d'equilibrio stabile, risolvendo esplicitamente le equazioni del moto in funzione dei dati iniziali. Trovare in particolare la soluzione che corrisponde ai dati iniziali (espressi in coordinate cartesiane)

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (0, 0), & P_3 &= (0, 0), & P_4 &= (0, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\ \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (u, 0), & \mathbf{v}_4 &= (w, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0), \end{aligned}$$

dove \mathbf{v}_i è la velocità del punto P_i e $u, w \in \mathbb{R}$.

(4) Nella configurazione

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 1), & P_2 &= (-1, 1), & P_3 &= (1, 0), & P_4 &= (-1, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\ \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (0, 0), & \mathbf{v}_4 &= (0, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0), \end{aligned}$$

determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto P_3 .

(5) Se i punti P_1 e P_2 sono fissati nelle configurazioni, rispettivamente, $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (-1, 1)$ e il piano π ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω , determinare le posizioni d'equilibrio relativo (*i.e.* le posizioni d'equilibrio nel sistema di riferimento solidale con il piano π) e studiarne la stabilità.

(6) Sotto le stesse ipotesi del punto precedente, determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto P_3 , in corrispondenza di una generica configurazione compatibile con il moto.