

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESONERO DEL 9-12-99

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) .$$

- (1.1) Scrivere l'equazione del moto.
- (1.2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (1.3) Discuterne la natura.
- (1.4) Discutere qualitativamente le curve di livello nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
- (1.5) Verificare che la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$ è periodica.
- (1.6) Scriverne il periodo come integrale definito.
- (1.7) Stimare il periodo.
- (1.8) Studiare la traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}, 0)$.
- (1.9) Discutere cosa succede se, nel caso precedente, si modifica il valore della velocità iniziale in $\dot{x}(0) > 0$.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione.