UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 27-6-2002 - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $U \cap W$ e di $U + W$;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h, k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + hX_2 + X_4 = -1 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + kX_2 + hX_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e siano $w_1 = (-2, 0, 2, 3), w_2 = (-1, 0, \frac{2}{3}, 1)$, $w_3 = (\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ e $W =< w_1, w_2, w_3 >$.

(a) Calcolare $dimW$ usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;

(b) Determinare due sottospazi U_1 e U_2 di V tali che :

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = U_1 \oplus U_2 = V;$$

(c) Siano $p_{U_1} : V \to W$ e $p_{U_2} : V \to W$ le due proiezioni parallelamente ad U_1 ed U_2. Determinare tutti i vettori $v \in V$ tali che $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$.

5. (a) Si definiscano rango e determinante di una matrice;

(b) si enunci il risultato che relaziona rango, determinante ed invertibilità di una matrice;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia A uno spazio affine di dimensione 4 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine. Siano H l'iperpiano di equazione $2X_1 - X_2 + X_3 = 0$ e q il piano di equazioni $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$.

Determinare tutti i piani $p \subset H$ tali che p passa per i punti $P_1(1, 0, -2, 0), P_2(-1, 1, 3, 1)$ e p interseca q in un punto.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Siano $U \subset V$ un sottospazio tale che $V = N(F) \oplus U$ e $G : U \to Im(F)$ l'applicazione lineare definita da $G(u) = F(u)$ per ogni $u \in U$.

(a) Dimostrare che G è iniettiva;

(b) Dimostrare che G è un isomorfismo;

(c) U è isomorfo a $V/N(F)$?

8. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di t per i quali A è diagonalizzabile.