Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/02
Geometria 1
Lavoro Guidato - Dr. Valerio Talamanca
Venerdi 22 marzo

1. *Date le seguenti coppie di vettori di* $\mathbb{R}^3$ *dimostrare che ogni coppia è composta da vettori linearmente indipendenti e determinare (per ogni coppia) un terzo vettore in modo che la tripla cosi ottenuta sia una base di* $\mathbb{R}^3$.
a) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 0, 1)$
b) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 0)$
c) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 2, 1)$

2. *Date le seguenti triple di vettori di* $\mathbb{R}^4$ *dimostrare che ogni tripla è composta da vettori linearmente indipendenti e determinare (per ogni tripla) un terzo vettore in modo che la quadrupla cosi ottenuta sia una base di* $\mathbb{R}^4$.
a) $v_1 = (1, 2, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 1, 1)$
b) $v_1 = (2, 2, 1, 1),\ v_2 = (0, 0, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 1, 0)$
c)$v_1 = (3, 2, 3, 1),\ v_2 = (1, 0, 1, 0),\ v_3 = (3, 0, 1, 1)$

3. *Date le seguenti quadruple di vettori di* $\mathbb{R}^3$ *determinare se esse generano* $\mathbb{R}^3$. *In caso affermativo estrarre una base.*
a) $v_1 = (1, 2, -1),\ v_2 = (1, 3, 1),\ v_3 = (1, 1, 1,),\ v_4 = (1, 0, 1)$
b) $v_1 = (3, 2, 1),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (2, 1, 0,),\ v_4 = (0, 0, 1)$
c) $v_1 = (0, 0, 3),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (3, 0, 1),\ v_4 = (1, 1, 1)$

4. *Determinare la dimensione e una base per i seguenti spazi vettoriali*
a) $D_3 = \{F(X)\in\mathbb{R}[X] \mid \textit{il grado di } F(X) \textit{ è al più } 3\}$
b) $SM_3 = \{A\in M_3 \mid {}^tA = A\}$
c) $T_3 = \{A\in M_3 \mid A \textit{ è una matrice triangolare superiore}\}$
d) $D_3 = \{A\in M_3 \mid A \textit{ è una matrice diagonale}\}$
e) $ST_3 = \{A\in M_3 \mid A \textit{ è una matrice strettamente triangolare superiore}\}$
f) rifare b)-d) per n *qualsiasi.*

5. *Sia* E *uno spazio vettoriale. Dimostrare che se* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *sono una base per* E *allora anche* $\{v_1 + v_2,\ v_2 \ldots, v_n\}$ *sono una base per* E.

6. *Data una matrice* $A = (a_{ij})\in M_n$ *definiamo* $\operatorname{tr} A$ *la traccia di* A *come* $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. *Dimostrare che* $\mathfrak{sl}_n = \{A\in M_n \mid \operatorname{tr} A = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale e calcolarne la dimensione.*