II Tutorato di GE2 A.A. 2001-2002

14 novembre 2001

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si calcoli il sottospazio ortogonale dell'insieme $S = \{(1,0,0);(0,2,0)\}$ rispetto alla forma bilineare data dalla matrice $\mathbb{I}_3$.

2. Sia f la forma bilineare data dalla matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   Esistono dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ tali che $f(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$?

3. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita nel seguente modo:

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

   dove $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice 2×2 scelta a piacere.

   Se a, b, c, d sono tutti strettamente maggiori di zero, è vero che $\phi(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$ al variare del vettore $\mathbf{x}$?

4. Sia $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare. Si dimostri che se $\dim V > 1$ esistono sempre coppie di vettori non nulli $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tali che $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.